

李迪

中国数学史简编

辽宁人民出版社

中国数学史简编

李　迪　编著

辽宁人民出版社
1984年·沈阳

中国数学史简编

李　迪　编著

辽宁人民出版社出版　　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　　朝阳六六七厂印刷

字数：320,000　开本：850×1168 1/32　印张：13 7/8　插页：2

印数：1—9,000

1984年5月第1版　　1984年5月第1次印刷

责任编辑：王常珠　　责任校对：李秀芝

封面设计：薛世哲

统一书号：7090·239　　定价：2.35元

前　　言

我国历史上曾经是个数学发达的国家，出现过一批卓越的数学家，写出了不少重要数学著作，取得过辉煌的研究成果，对世界科学的发展产生过一定的影响。但是十四世纪到本世纪初的六百年间，正当西方数学迅速发展的时候，由于当时我国政治、经济、文化等方面的多种原因，使我国数学的发展处于停滞状态，与同期西方数学相比，显得非常落后。本世纪三十年代，我国的数学又有了较快的发展，取得了一些较好的成果。

我国数学曲折发展的历史，应当认真总结，肯定成绩，吸取教训，这对于我们今后的数学研究工作会有某些借鉴。本书就是本着这种思想，所做的一次尝试。

为了使本书多少有些自己的特点，因此在写作中比较注意以下几个问题：

1．在时间上，向上溯到旧石器时代；向下延到本世纪四十年代初。

2．尽可能把近年来有关中国数学史研究的新成果收入书中，力求反映我国数学史研究的最新水平。

3．关于中国数学史的分期，本书大体上是按我国数学发展的阶段性划分的。每一章基本上是一个时期，但在叙述上有

时也有交叉。

4．尽可能利用文物考古资料和民族史资料，以充实和说明有关问题。

在本书编写过程中，除广泛参考前人的有关论著外，还得到我国数学界和其他一些单位、同志的大力支持。第四章中许多珍贵资料是复旦大学苏步青先生和北京大学江泽涵先生提供的，江教授还请北京工业学院孙树本先生协助核实过材料。许多重要的实物照片是由北京故宫博物院、中央民族学院和北京大学数学系资料室提供的。北京师范大学白尚恕先生对本书初稿提出过宝贵意见，并在其他方面给予许多帮助。杭州大学沈康身先生、辽宁师范学院梁宗巨先生、辽宁大学廖德清先生和吴振奎先生、江苏师范学院钱克仁先生、西北大学李继闵先生、天津师范学院李兆华同志、内蒙古师范学院罗见今同志、刘洪林同志以及陈建功、熊庆来和李俨先生的亲属等都给予很大支持。内蒙古师范学院的院、系领导和科研处都对这一工作给予热情关怀和支持，谨向以上单位和个人致以衷心的谢意。

由于笔者水平有限，虽然进行了多次修改，错误和不足之处仍然难免，望读者不吝赐教。

李　迪

一九八二年五月二十七日于沈阳

目　录

第 一 章

原始社会到西汉末年

（公元一世纪初期以前）

本章论述我国数学的起源和早期的发展，即由数学的萌芽到以《九章算术》为代表的初等数学体系形成的过程。

第一节 我国数学的起源

原始社会的文化

数学与其它科学分支一样，是在一定的条件下发生与发展的。数学的早期萌芽与原始社会的形成紧密相连，原始社会时期人们的各种实践活动和智力的发展促使了数学的发生。因此有必要把我国原始社会时期的文化做一简要介绍，阐明我国数学起源的背景。

我国原始社会是在什么时候出现的，目前还很难断定。据古人类学研究得知，距今一百七十万年前的云南“元谋人”已会初步加工石器。在北京西南周口店的五十万年前猿人遗址中曾发现约十万件各种形状的石器和石料；同时发现堆积厚薄不

同的灰烬层和烧过的石块与兽骨。这说明那时在我们伟大祖国的大地上已经出现了原始文化的萌芽。一万多年前生活在北京周口店的“山顶洞人”已有一定的文化，他们的活动范围由打猎和采集野果发展到捕鱼，进入多种经济并存的时代。“山顶洞人”已经有了美的观念和原始宗教意识，他们懂得了缝纫和染色，所用工具除石器外还有骨器。考古学家们认为“山顶洞人”已进入旧石器时代①末期。

我国大约于一万年前开始进入新石器时代。约七千年前的浙江余姚河姆渡原始社会遗址是我国早期新石器时代社会的典型代表。河姆渡人不仅能制造精美的石器，而且能烧制多种陶器②，能够使用骨制农具种植水稻。还有木构建筑遗址的发现，保存至今的一些木构件上有长方形和圆形榫卯③。

在距今约六千年前的西安半坡新石器时代遗址中，有建筑遗迹群，说明当时已出现了原始村落。房屋的平面图有圆形的、长方形的，也还有近似正方形的。半坡遗址出土了大量的彩陶，这说明当时不仅制陶技术有了很大提高，而且在艺术方面也有了进步，出现了比较多变的图案，反映出当时人们已有了一定的抽象能力。此外在半坡还出土了大批石制、骨制的农业生产工具、渔猎工具、手工业工具和其它器具，而且磨制得很规则，这些清楚地表明当时人们已有了各种几何形状的观念。

新石器时代，人们已能够制造多种多样的工具和器物。到

---

① “旧石器时代”是原始社会的前一个阶段，其特征是生产工具主要为打制石器。后一个阶段，主要为磨制石器，称为“新石器时代”。

② 陶器不是河姆渡人发明的。

③ 榫音损 sǔn，两物凹凸相接的凸出部分叫榫，凹下部分叫卯。

了原始社会末期，我们的祖先已能炼铜。由于人们活动范围的不断扩大，为数学的起源创造了条件。事实上，在人们和自然界的接触以及各种活动中，数学的研究对象——空间形式和数量关系必然以某种形式反映到人的头脑中来，再经过人们的思维作用逐渐形成了某些数学观念，并进一步抽象成数学概念。最初数目的出现和几何图形的绘制就是这种抽象的结果。

数的概念的起源

数的概念是人们长期在数目观念的基础上所产生的认识上的飞跃，因此数的概念的起源是相当早的。

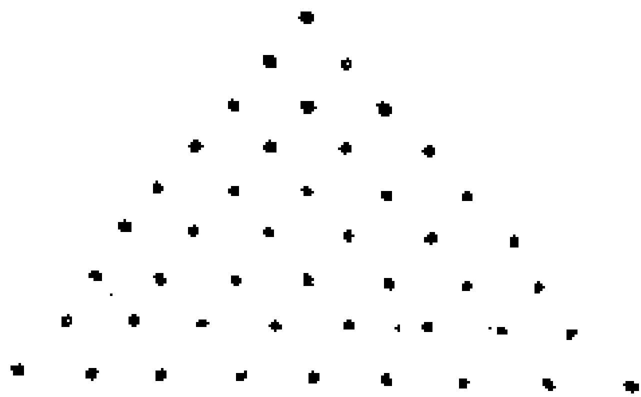
1．出土文物反映的数目观念。数的概念在我国的起源，可以追溯到原始社会。当时人们对数目的认识，最初是从“一”和“多”开始的，后来才逐渐有了“二”、“三”等数目观念。这种原始的数目观念只是作为一些物体的个数而形成的。它们是一种基数反映到人的头脑中。起初，人对数目的认识都是和具体的对象联系在一起的，没有离开对象的抽象的数概念，例如说一只羊、两根木棒等等。用手指计数是通过简单的对应关系而“数”出某种物体的个数，这已经是一种进步了。



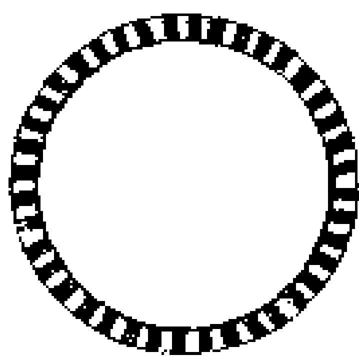
1－1 河姆渡陶器上的四叶纹

在出土的原始社会文物中，我们可以看到一些与数目有关的内容，例如河姆渡的骨耜有两个孔，半坡的尖底提水

器有两个耳。在其它陶器上有两耳或三足，在河姆渡的陶钵底上刻着四叶纹①（图1—1），这是形成“二”、“三”、“四”等数目观念的依据。半坡的陶器上有整齐排列的点点，由一个到八个或到九个②，可以说是“八”和“九”的反映（图1—2）。还有一些陶器上有近似等分圆周形的刻纹，很规则，有的正好为八十等分（图1—3），如河北磁县下潘汪村出土的四五千年前的陶器上就有这种例子③。至于是否有意识地进行等分和有较大的数目观念，不好确定。



1—2 半坡陶器上的点子



1—3 陶器上的八十等分圆周

2．各种原始记数法。《易·系辞传》上说：“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”，说明结绳记数和刻划记数是当时带有普遍性的记数方法。至于中国的结绳起源于何时，很难回答，有些古籍上说轩辕（黄帝）、伏羲、神农等很长一段历史传说时代都是“结绳而用之”④，或说伏羲“结绳而治”⑤。如果说结绳是我国新石器

---

① 浙江省文管会、浙江省博物馆：《河姆渡发现原始社会重要遗址》，载《文物》1976年第8期，第8页。

② 中国科学院考古研究所、西安半坡博物馆：《西安半坡》，1963，文物出版社，图版壹肆玖。

③ 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第79页。

④ 《庄子》卷十郭象子玄注引“司马”说。

⑤ 《北堂书钞》卷十二引《典论》。

时代广泛使用的记数方法的话，恐怕是不会错的。三国时吴人虞翻①在所著《易九家义》中引汉郑玄的话说：“事大，大结其绳；事小，小结其绳，结之多少，随物众寡。”这里把结绳的用法说得很清楚。现已找不到早期结绳的实物资料。外国的结绳事例很多，可以作为认识我国结绳记数的参考。例如在日本的冲绳等地直到明治年间（公元1868—1911年）人们还调查到结绳的遗物，当地人把结绳叫做“藁算”②。

刻划记数在我国也起源于原始社会。根据现有考古发掘资料，最早可以追溯到一万多年前的“山顶洞人”。在“山顶洞人”的遗址中出土了四个带有磨刻符号的骨管③，可能是一种刻划记数的实物。

这四个骨管上的符号为横向磨制，形状多数是圆点形，有两个长圆形（图1—4）。其中有一个围着骨管形成半圆，展开成平面，则为一长条形。骨管A，相对的两个侧面分别有一个圆点和两个圆点，共三个；骨管B，相对的两个侧面，一面三个圆点，一面两个，共五个；骨管C，相对的两个侧面，一面两个，一面一个，在另外一侧又加一个长圆点，共四个；骨管D，只有一个长条形的符号。从这些符号的排列方式，我们可以推测出“山顶洞人”对于数目的一些观念。“山顶洞人”最基本的数目是一，用一个圆点表示，两个圆点并列的是二，三个圆点并列的是三。同时可以看到，骨管对应两侧的符号带有累计的意义。一个加两个是三个，两个加三个是五个。长圆

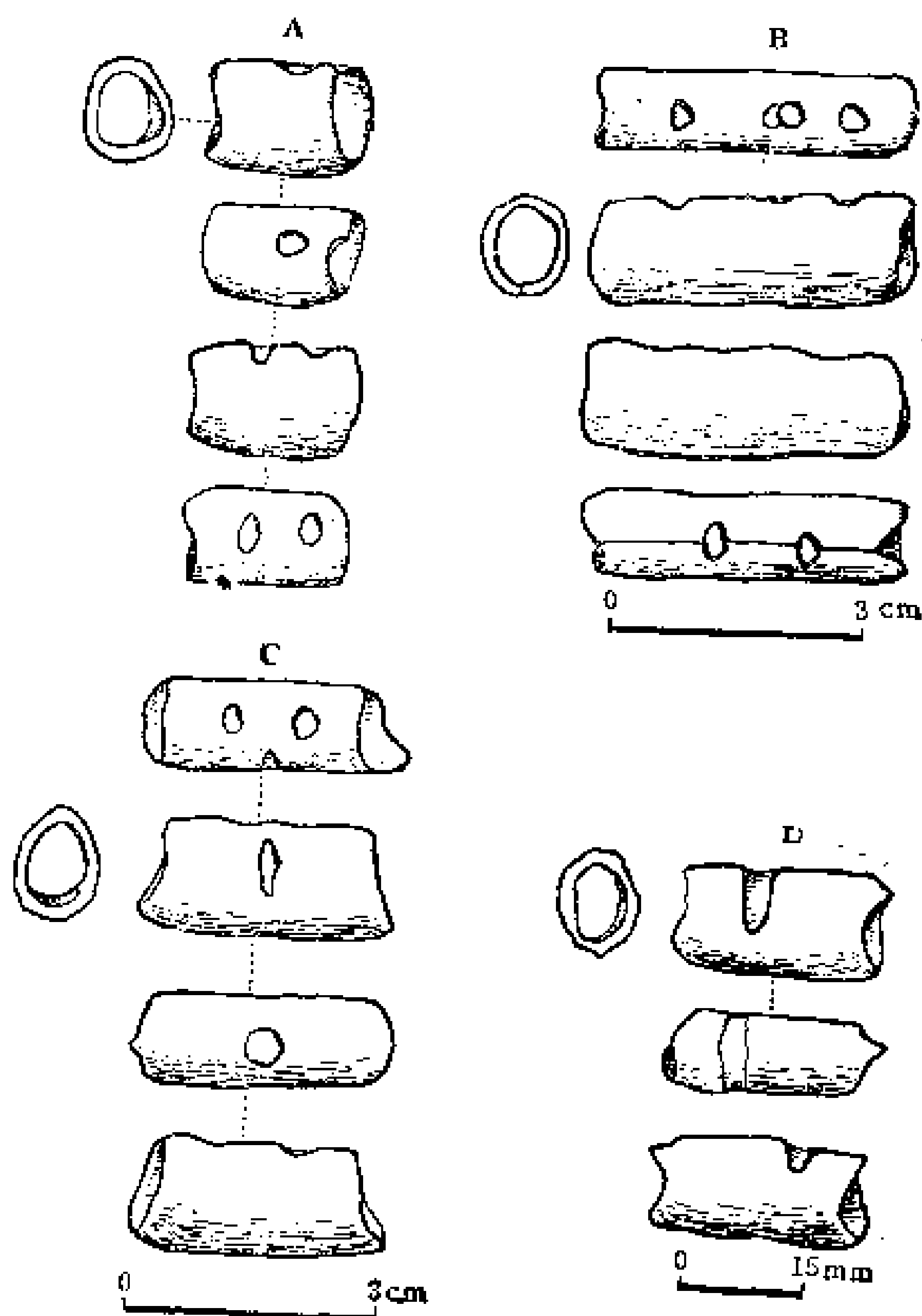
---

① 翻音河hé。

② （日）长滨　章：《结绳および记标文字》，《数学史研究》通卷第73号（1977年4—6月），第1—41页。

③ 裴文中：《周口店山顶洞文化》（英文版），1939，Peking，P.30。

形可能是代表“十”。如果把这些骨管都展开成平面，其上的

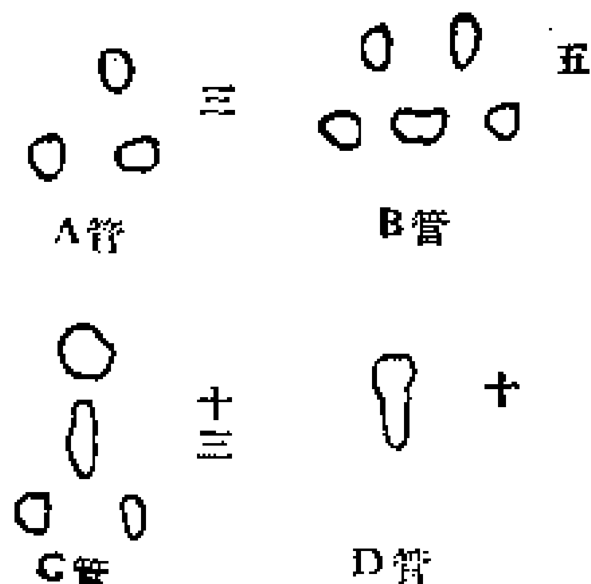


1—4 山顶洞人的刻符骨管

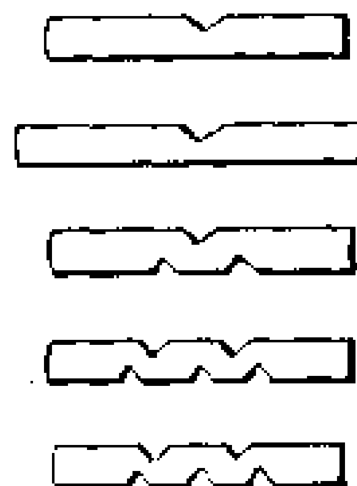
符号排列如图1—5所示的那样，它们分别应代表“三”、“五”、“十三”和“十”，这反映着一种十进制的思想，这一点很重要。

刻划记数的方法沿用了较长时期。到了原始社会末期，甚至到了奴隶社会和封建社会，都可以找到这方面的资料。例如在青海省乐都县柳湾原始社会末期的遗物中有带刻口的骨片

（图1—6）四十件。在骨片的中部一侧或两侧刻有三角形的小口，其中的三十五件上各有一个，三件上各有三个，两件上各有五个，被认为"大约是用作记事、记数或通讯联络用的"。①这样解释有道理。刻口的排列方式和山顶洞人的骨管刻划非常相似：三个口的是在骨片的一侧有一个口，另一侧有两个口；五个口的是一侧有两个，另一侧有三个，这么多带刻口的骨片，说明它们不但用于记数，而且有可能用于简单的计算，由一到五十四之间的任何一个数都可以用这些骨片迅速地摆出，比如"四"用一个带三个口的和一个带一个口的骨片代表，"十五"用两个带五个口的、一个带三个口的和两个带一个口的代表等等。把这种骨片看作是一种原始的计算工具是并不过分的。



1—5 山顶洞骨管展开

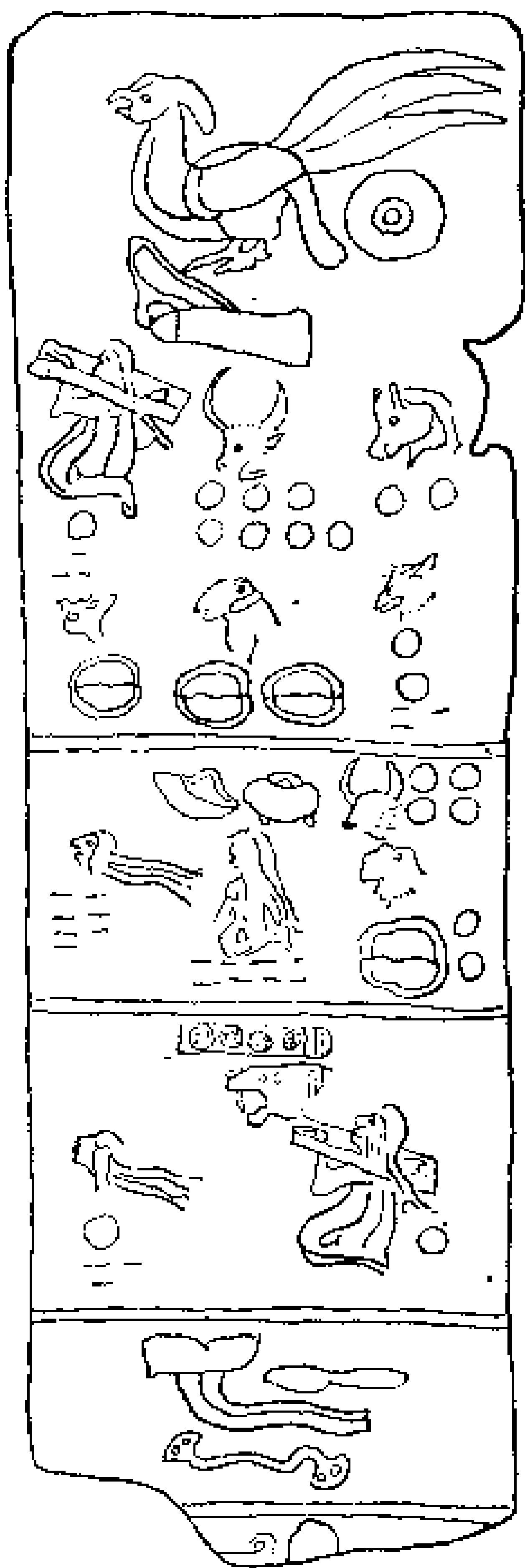

1—6 带刻口的骨片

在云南晋宁石寨山出土的一块青铜片上有图画文字，其中包括着记数方法（图1—7）。铜片为长方形，下残，现存者图画部分分为五段，末段只剩一个边。②记数用三种符号表示，即"—"、"○"和"◎"，分别代表

① 青海省文物管理处考古队、中国科学院考古研究所青海队：《青海乐都柳湾原始社会墓地反映出的主要问题》，载《考古》1976年第6期，第365—377页。

② 林声：《晋宁石寨山出土铜器图象所反映的西汉滇池地区的奴隶社会》，载《文物》1975年第2期，第69—81页。

个、十和百。例如最上一段画着一个带枷的人，下面有一个"○"和三个"—"，可能是表示这种带枷的人有13个。还用同样的符号记载牛、马、山羊、绵羊、老虎以及人的数目。这里的记数方法，显然也是十进制的。此项资料虽然是奴隶社会的，而且在时间上已晚到西汉时期，但是反映了我国早期记数方法的一种遗制，或许是当地少数民族创造的。

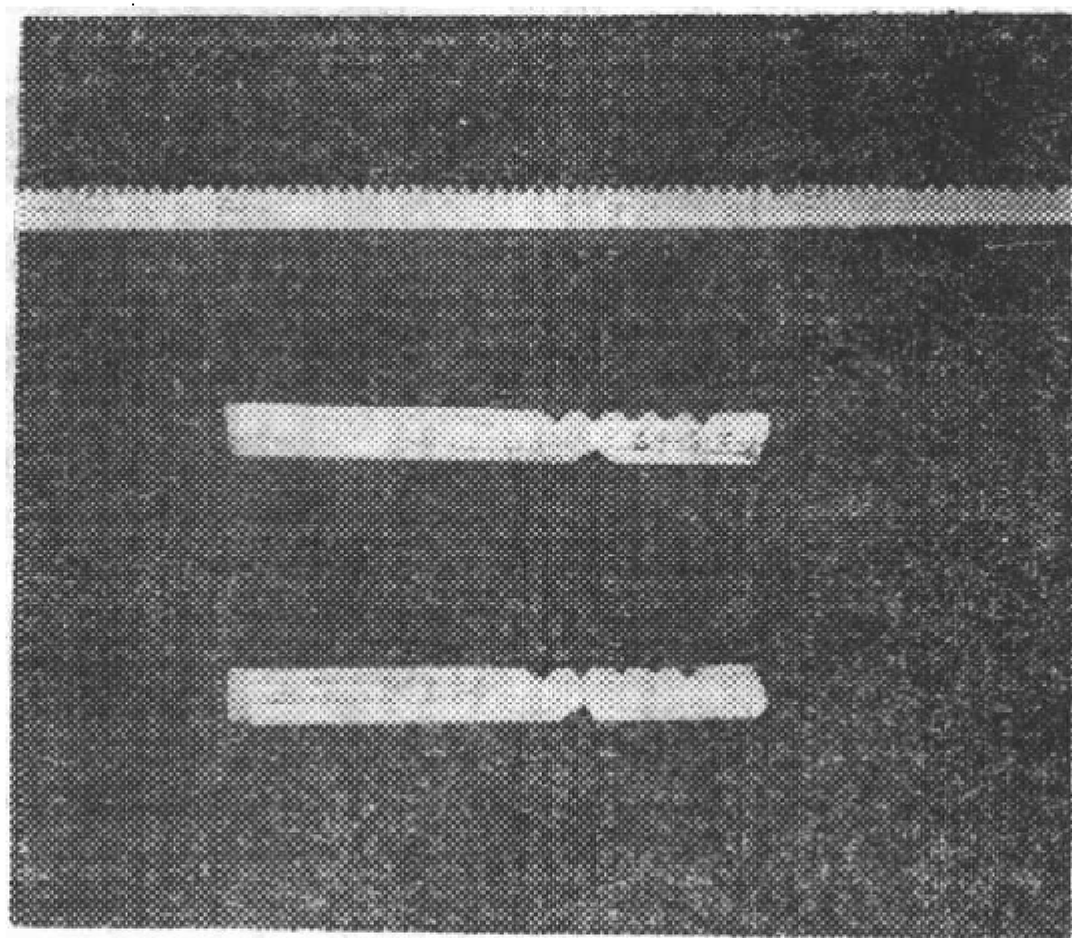


1—7 云南古代刻符记事铜版

3．少数民族的记数法。我国的少数民族和汉族一样，在没有文字以前也都是采用结绳和刻划记数方法①。建国后，在云南等地收集到不少这方面的实物。北京中央民族学院少数民族文物展览室陈列着瑶族和卡佤族刻竹记事的两块竹牌（图1—8）以及台湾高山族结绳记事等的实物。云南福贡地区的傈僳族直到五十年

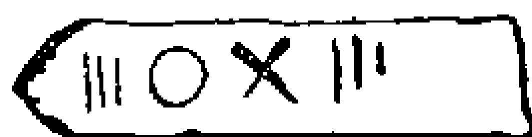
① 李俨：《上古算学史》，载《中算史论丛》第五集，1955，科学出版社，第1—14页。

代还用在木板上刻划的符号记事或表意。例如在一块木片上刻



1—8 卡佤族刻竹

着四个符号（如图1—9），表达的意思是："三个人（Ⅲ），月亮圆时（○），和我们见面了（×），现在送上大、中、小三包土物，分别送给大、中、小三个领导（Ⅲ）。"①云南澜沧拉祜族自治县的拉祜族，直到1957年还用木刻记载家禽、家畜的帐目（图1—10）。例如一块记鸡数的帐目木牌是这样的：在木牌的正面和侧面都刻着缺口，侧面的一个缺口表示一千只鸡，正面一个缺口表示十只鸡。这块木牌的侧面有四个缺口，正面有二十个缺口，因此总



1—9 傈僳族刻木

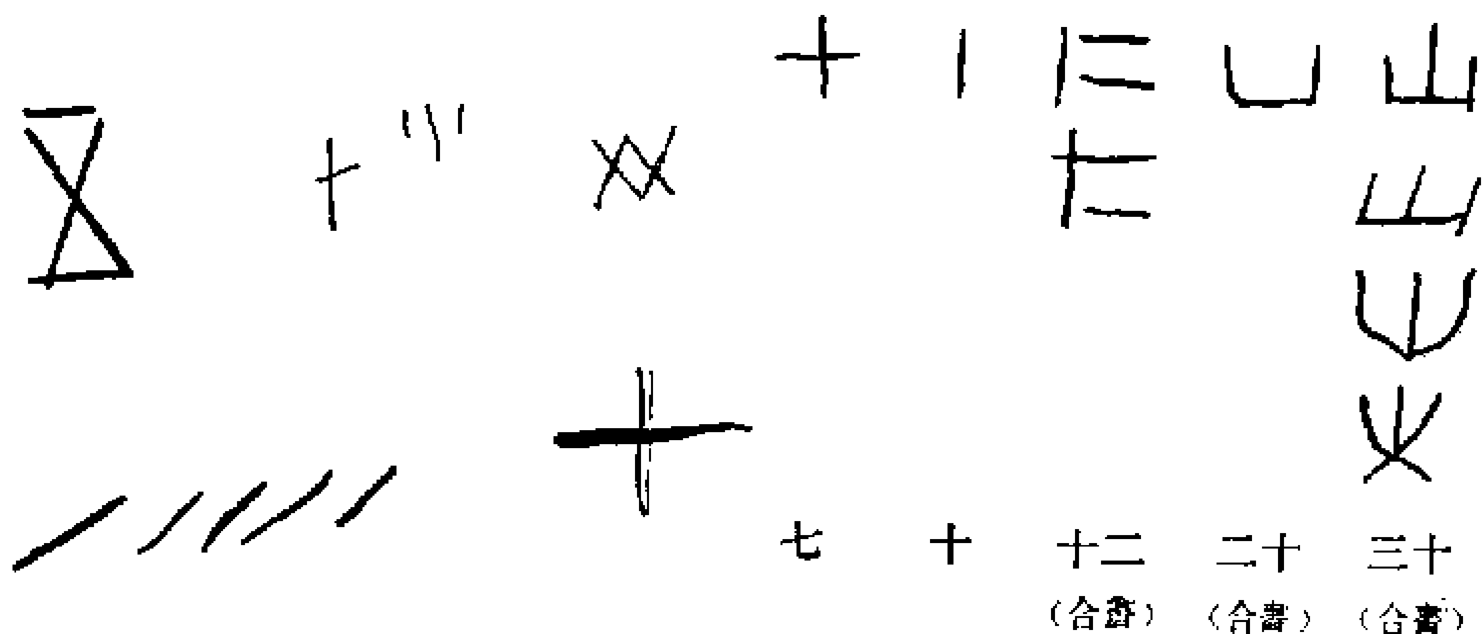
① 李家瑞：《云南几个民族记事和表意的方法》，载《文物》，1962年第1期，第12—14页。

共表示四千二百只鸡。①云南红河元阳地区的哈尼族人买卖田地时，常常用单股的麻绳打成结，标志田价银子数。每个结代表一两银子，结与结之间的距离相等，表示单位相同。如果最后距离只有一半，就表示半两。这种打结麻绳，买卖时要制同样的两根，双方各执一根②。在新疆巴里坤草原的哈萨克族牧民至今还用羊毛绳打结记羊数③。这些都是古代结绳记数的遗风。



1—10　拉祜族等的刻木与结绳

4．数目字的出现。在结绳和刻划的基础上，进而形成数



1—11　上海马桥遗址出土陶器上的刻符　　1—12　城子崖出土陶片上的数目字

目字。在半坡出土的陶器上刻划的符号中就包含了数目字，计

①② 李家瑞：《云南几个民族记事和表意的方法》，载《文物》，1962年第1期，第12—14页。

③ 本条资料系新疆哈密铁二中刘志铭同志提供。

有“×”（五）、“∧”（六）、“+”（七）、“)(”（八）、“|”（十）、“||”（二十）①。在陕西姜寨出土的陶器上也有数字符号，比半坡的多“—”（一）、“|||”（三十），而少“)(”②。这也是一种十进制系统，与前面的记数法完全相同。在距今四千年前的上海马桥遗址出土的陶片上有“X”、“|”和“+”，相当于五、一(或十)和七③（如图1—11）。年代与马桥差不多或稍晚的山东城子崖出土的陶片上刻有五个数目字即相当于七、十、十二、二十、三十，后三个数是合书（图1—12）。

事实说明，约四千年前我国的数字写法发生了一次重大变化，如“×”变成了“X”，“||”变成了“∪”，“|||”变成了“⩂”。十的倍数采用“合書”的形式，对后世影响很大。很显然，这种改变有明显的道理，因为原来的写法容易发生混淆，如“×”与“+”，“|”、“||”、“|||”与“—”、“=”、“≡”，孤立来看就分不清了。通过长期实践，当人们发现这种混淆时，必然要想到改变写法。城子崖的数目字“与甲骨文早期为近，和殷文化是一个系统”。④但是比甲骨文早数百年到一千年。

几何的起源

几何的起源，在我国同样很早，它萌芽于旧石器时代，或

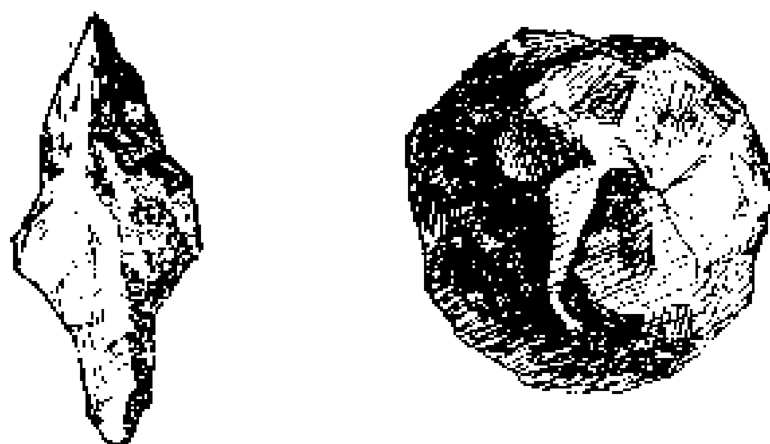
①② 王志俊：《关中地区仰韶文化刻划符号综述》，载《考古与文物》，1980年第3期，第14—21页。其中“八”为笔者所提出。

③ 上海市文管会：《上海马桥遗址第一、二次发掘》，载《考古学报》，1978年第1期，第109—137页。

④ 董作宾、傅斯年、郭宝钧：《城子崖》，1934，南京出版，第71—72页。

许比数目观念的起源还要早。因为人们在从事生产或其它活动中，自然界一些物体的形状、大小和位置关系会逐渐反映到人的头脑中来，人们通过不断地思考、抽象，便有了形的初步观念。

1．**早期石器的几何形状**。原始人制作石器的目的是把它作为工具使用，制造时必然要考虑大小和形状。形状思想的产生和数目观念一样，要有个过程。以自然物的形状为模特儿，经过反复观察、思考而形成某些简单形状的观念。如观察一些圆形水果可以产生球的观念；观察一些平展的植物叶子和平静的水面容易形成平面的观念；观察一些直的树干和直的树枝容易形成圆柱或直线等观念，等等。从观察自然物产生的简单几何观念用来考虑石器的形状，再根据要制作的石器的功能确定采取什么形状和大小。用于砍削的石器要做得平一些，象石刀、石斧等属于这一类。它们的每一个面都是近似的平面。北京猿人使用的石器中有很多片状的，还有考古学上称为尖状器的石器，从几何形状来说，是一种近似的锥体（图1—13）。在山西省襄汾县丁村发现了一批几万年前原始人制造的球形工具（图1—14）。其中最大的重量在1500克以上，最小的在200

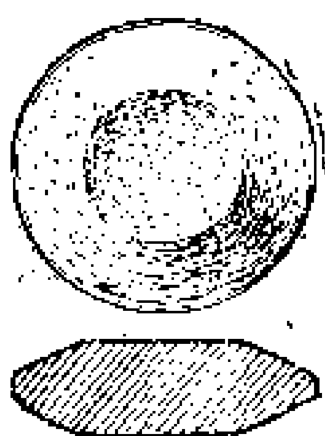


1—13　北京猿人的石锥　1—14　丁村人的球形工具

克左右，可能是用于打猎的武器，可见早在几万年以前，我们

的祖先已经有了球的观念。考古工作者还发现时代较晚的许多棒状石器，如在黑龙江省巴尔虎左旗和吉林市郊虎头砬子等地新石器遗址发现的石制棒状物，有扁的也有圆的，比较规则，说明柱体观念已有了进步。

从发掘的石器上还可了解到原始人的其它几何观念。例如1974年在云南省云县忙怀新石器时代遗址中发现的一百多件石器中，有一件圆饼状的石钻（图1—15），在另一件石器的平面上有纵横交叉的方格纹，说明在五、六千年前人们已经有了圆、平行和垂直等几何观念（图1—16）。



1—15　忙怀出土的石钻

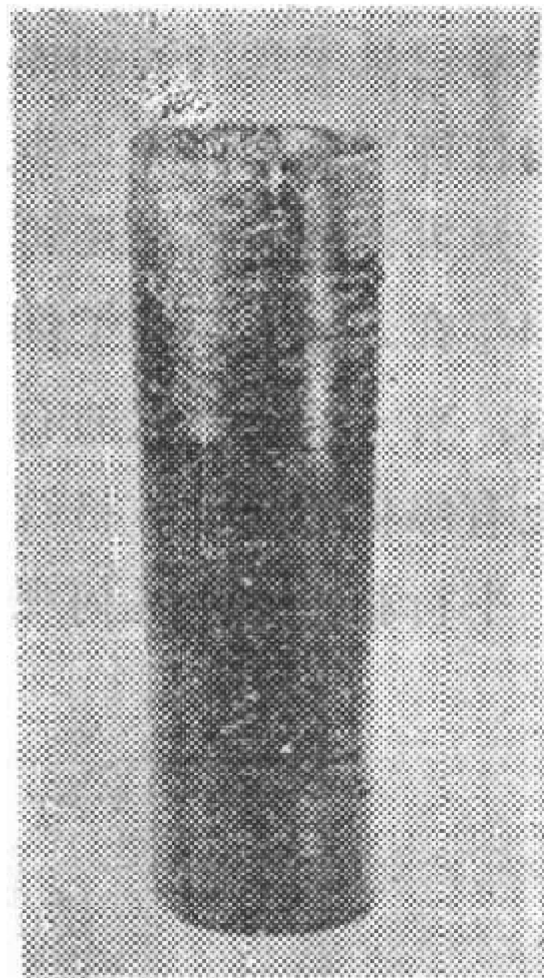


1—16　忙怀刻划平行线的石片

从各种不同形状的石器中，反映出原始社会随着社会生产的发展，人们逐渐有了平面、球、圆、柱、锥、平行、垂直等许多初等几何观念，是几何在我国萌芽的一种表现。

在新石器时代的其它遗物、遗迹上也反映着一些几何观念。如一万多年前的资阳人（今四川省资阳县）制作的三棱形骨锥，中间部分的三条棱基本平行，两端成锥形，因此中间呈三棱柱、两端呈三棱锥形。“山顶洞人”的骨针，磨得很圆，呈较规则的圆柱状。在稍晚的河姆渡新石器时代遗址中发现了四个木筒，很象一节竹筒，中空，壁厚约1厘米，厚度均匀，

上下平直，两头缠着藤篾①类的圆箍多道，是很规则的圆柱（图1—17）。在河姆渡还发现珠、丸、环等玉制的装饰品，具有球、圆、平行平面等几何特征。



1—17 河姆渡出土木筒

2. 从陶器形状看原始社会的几何观念。陶器在新石器时代占重要地位。石器的形状在陶器上有了发展，多数器物的水平截面基本都是圆形的，口和底也多为圆形。如河姆渡出土的陶器大都是这种形状，有的敛口釜的外沿呈现多边形。

半坡新石器遗址出土的陶器，其几何形状丰富多采②。三足陶器，除了反映出“三”这个数目之外，还说明当时人们发现三足具有稳定性的特点，这是一个很重要的发明。在半坡遗址出土的大批陶器中，最简单的是纺轮。光是这种遗物就有50个，还有两个用石头磨成的。它们中间都有从两面钻成的小圆孔，大多数两面是平面；个别的只有底面是平的。侧面的几何形状有的是圆柱（图1—18），有的是圆台（图1—19）。与此相近的是一大批圆环。除了多数呈同心圆外，还有三个外圈带齿的特别形状，其中一个有六齿外突，一个有三十四个齿，一个有二十八个齿，齿距虽不是绝对均匀，但大体上差不多，说明

① 篾音灭miè，劈成长条的竹或藤片。

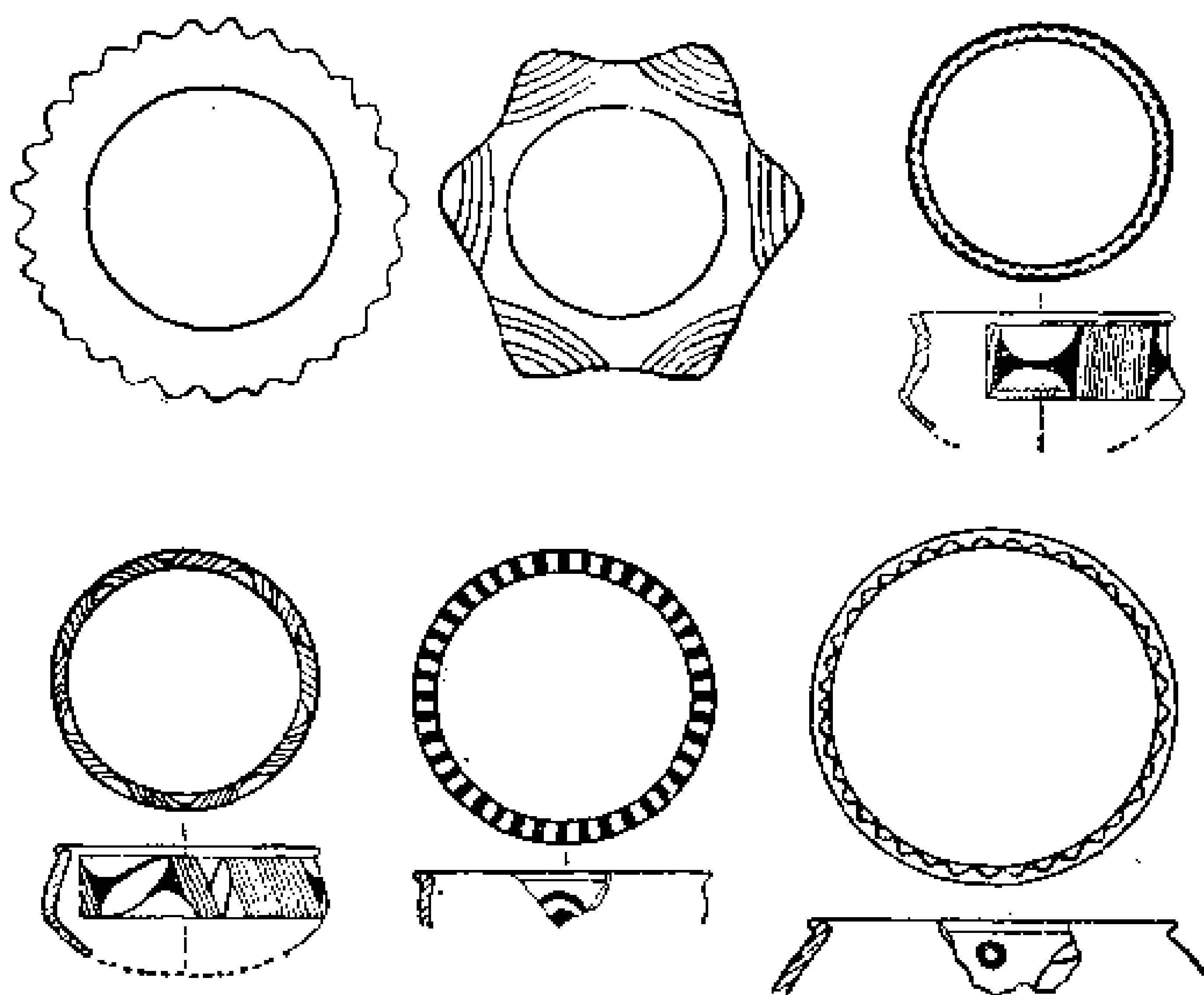
② 中国科学院考古研究所、陕西省半坡博物馆：《西安半坡》，1963，文物出版社。



1—18　半坡出土的圆柱形陶纺轮　1—19　半坡出土的圆台形陶纺轮

那时已经有了等分圆周的思想。还有一大批大小不等的陶球，都很规则，说明球的观念已完全形成。

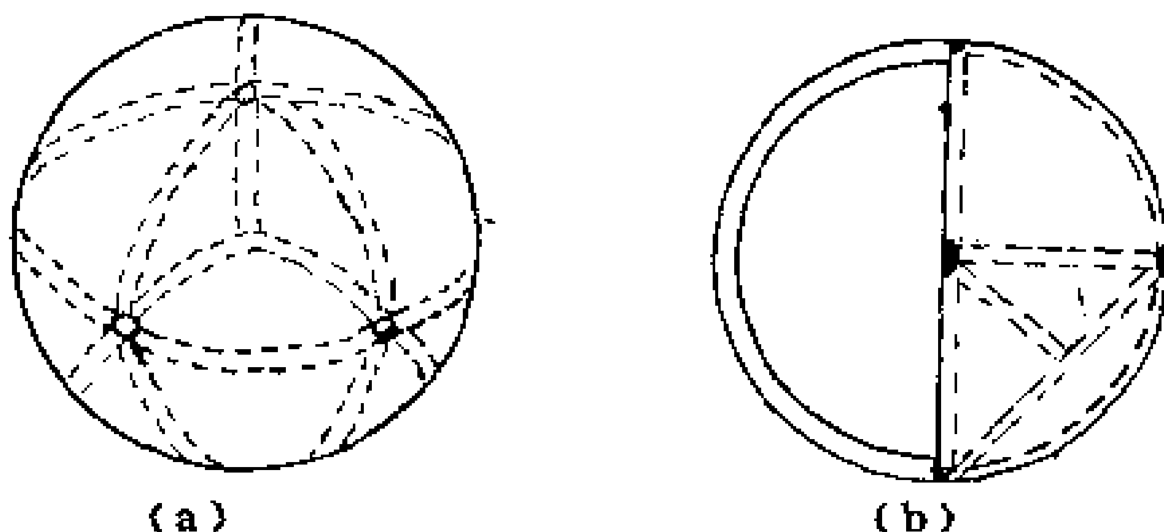
在一些陶器上具有等分圆周的特点，如河北磁县下潘汪新石器时代遗址出土陶器的口沿不仅是规则的圆形，而且底周外



1—20　下潘汪出土陶器口沿形状

缘有花牙子，牙距比较均匀[1]，明显地反映出等分圆周思想（图1—20）。

在四川[2]、湖北[3][4]一带新石器时代遗址中先后发现不少空心陶球[5]，制作精致，非常规则（图1—21）。由实心球到



（a）　（b）

1—21　大溪出土的空心陶球

空心球在几何认识上是一个很大进步。这些空心陶球的特点是：都有镂孔，孔与孔之间用实线或虚线连接，球壁厚度均匀，外面的连线都具有规律性。比如在桂花树出土的陶球中有一个画着六条经线和一条纬线，经线基本上构成三个大圆，交于两个镂孔上，经纬线的交点上也是镂孔。还有一个以一个镂孔为中心画出“米”字型的双虚线。毛家山出土的也有一个与此相似，每个上面有六个孔，三对，每对正好是一个直径的两个端点。大溪的陶球也与此类似，也是六个孔，只是外面的连

① 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第73—116页。

② 四川长江流域文物保护委员会文物考古队：《四川巫山大溪新石器时代遗址发掘记略》，《文物》，1961年第11期，第15—21页。

③ 纪南城文物考古发掘队：《江陵毛家山发掘记》，载《考古》，1977年第3期，第158—165页。

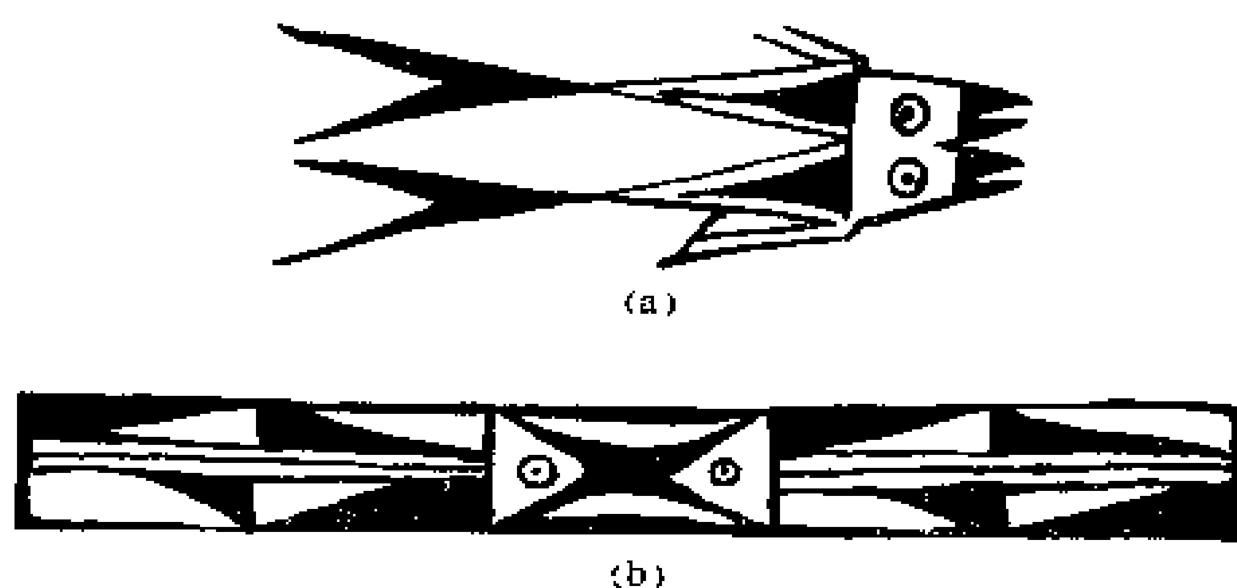
④ 湖北省荆州地区博物馆：《湖北松滋县桂花树新石器时代遗址》，载《考古》，1976年第3期，第187—196页。

⑤ 最近安徽也出土了一大批。

线稍有差别。很显然，三个直径是互相垂直的。

这些空心球说明早在五六千年以前，我们的祖先就已经有了不少有关球和球面几何的知识。

3．陶器花纹中的几何图形。新石器时代遗留下来的陶器很多。这些陶器上的花纹和图案，对研究古代几何学的起源非常有用（花纹和图案的做法有两种：一种是在陶器的表面上刻划；另一种是用不同的颜色描绘）。河姆渡的彩陶上有明显的平行线和不太规则的正方形。半坡出土的彩陶上提出了几何图形来源的一种途径：由某种自然物（如鱼）的形状逐渐演变成几何图案（图1—22）。有人作过这种演变的推测[①]，看来是



(a)

(b)

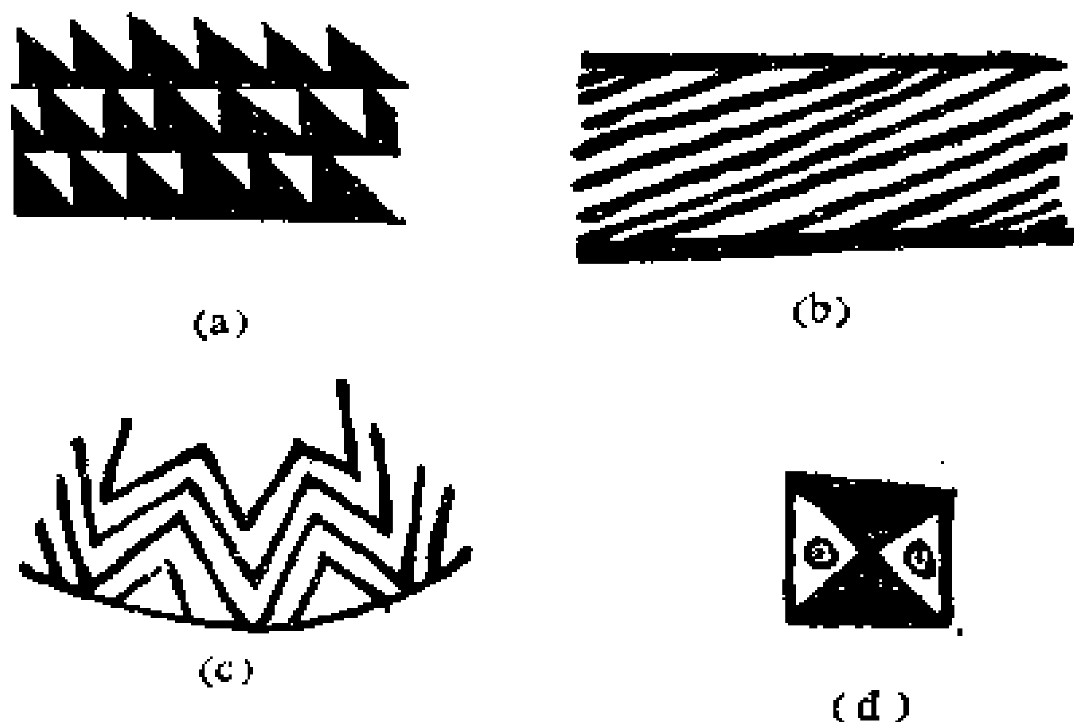
1—22　半坡出土陶器反映几何图形演变的图案

合乎实际的。即由鱼形演变成不规则的梭形或菱形、三角形等，再变成比较规则的几何形。而且可以从实物上较清楚地看到：有上下两条鱼，头朝一侧；还有的两头相对、沿着两个方向进行。

西安半坡出土的彩陶上的几何图案有平行线、折线、三角形、菱形、圆、长方形等等（图1—23）。三角形又可细分为

① 《西安半坡》，第181—185页。

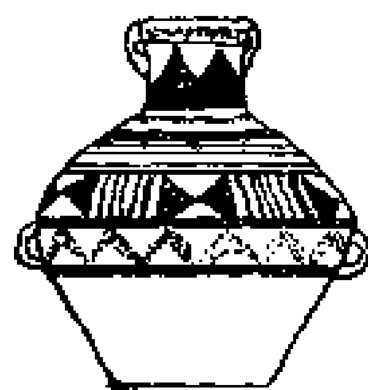
任意三角形、直角三角形、等腰三角形和等边三角形。这些事



1—23　半坡出土陶器上的几何图案

实说明，早在六千年以前，我们的祖先已经能够绘制初等平面几何中的大多数直线图形。虽然这些图形绘制得比较粗糙，但是画图需要一些简单的工具，因此推测半坡时代的人可能会使用直尺（不能用现代的观点理解原始社会的直尺，它可能是某种能起直尺作用的代用品，如很直的草棍等）。

从稍晚期的新石器时代遗址出土的陶器花纹来看，人们的几何知识有了发展。比如在下潘汪遗址出土的陶盆上有很多几何图案，圆弧形和其它曲线形图案有了显著的增加，盆口沿上的花纹表现出准确的等分圆周图形。①



1—24　张家台出土陶器几何图案

甘肃省景泰县张家台出土的新石器时

① 《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第75—116页。

代的彩陶罐上有很规则的平行线、三角形、圆弧等几何图案（图1—24）。①

第二节　早期数学知识的积累

大约距今四千年前，我国开始进入奴隶社会。由于奴隶制的建立，生产得到很大发展，奴隶和自由民创造了我国早期的科学文化，也推动了数学的发展。由夏、商开始到封建社会初期的秦代将近两千年的时间里，积累了丰富的数学知识。主要表现在以下几个方面。

数概念的发展与扩充

人们在从事生产或其它活动中，数目多次反映到人的头脑中来，再通过长期思考，进一步抓住它的特性，从感性认识上升到理性认识，从而形成了数的概念。

1. 商甲骨文中的十进制记数系统。 数的概念形成于新石器时代末期，完成于奴隶社会初期的商代。商代是我国奴隶制经济发展时期，科学、文化都达到了较高水平：当时已能大规模地炼铜；已经发明了车子；有了历法；农业生产技术也有了很大提高。特别是甲骨文和金文的出现标志着我国的文字从简单的象形逐渐发展到成熟的阶段。所有这些技术和文化成就对于

① 甘肃省博物馆：《甘肃景泰张家台新石器时代的墓葬》，载《考古》，1976年第3期，第180—186页。

数学的发展都起了推动作用。

在甲骨文中有许多数目字，其中最大的数目字已经达到“三万”。现举百以上的例子如下：

二百：“二百人王”

三百：“左右中人三百”

四百：“四百”

五百：“㱿贞五百宰□”

八百：“𢀛方征……八百”

九百：“乎……九百人”

一千：“丁未卜……王登千人”

五千：“五千”

八千：“□人八千在𡧊”

一万、三千：“登妇好三千、登旅万”

三万：“癸卯卜……其□三万”

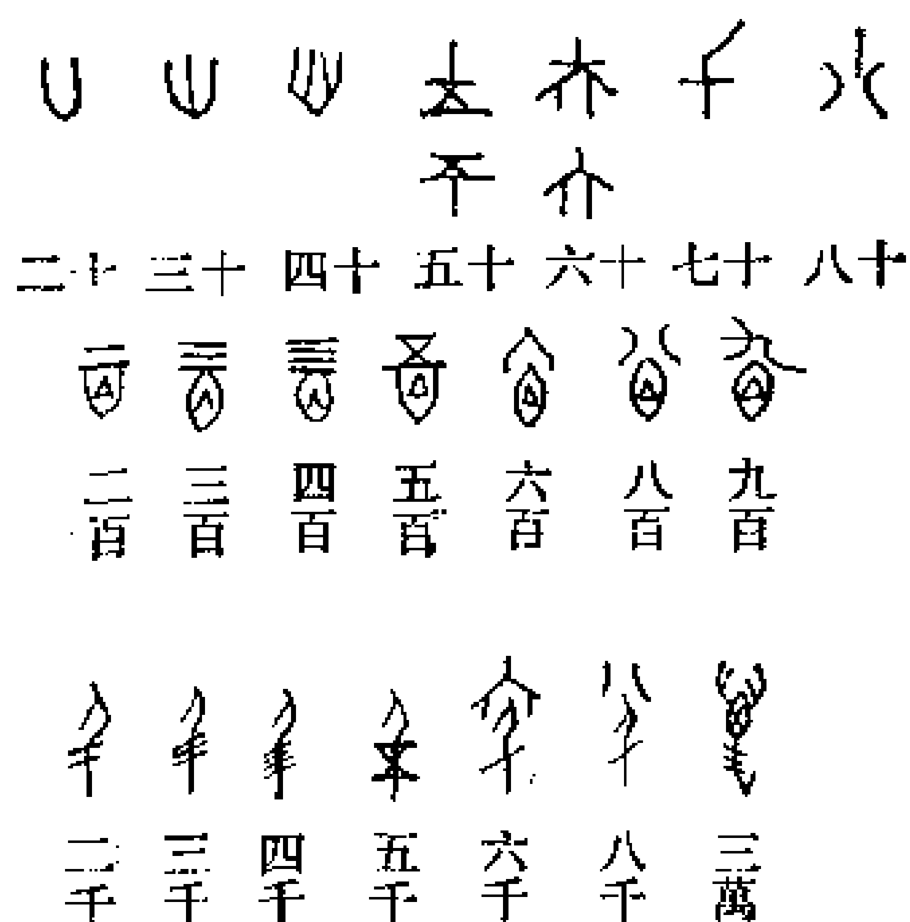
甲骨文的字形有些和现代文字不同，但是我们也可以清楚地看出：后来汉文中的数目字是从甲骨文演变来的。甲骨文中的数目是十进位的，是以前不完善十进制的完善化和必然的发展。从1到10的每个数都有文字表示，还有“百”、“千”、“万”等也都有相当的文字符号。现在把这十三个文字列举如下：

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 萬

1—25

关于十、百、千、万的倍数大都采取合书的方式书写，如

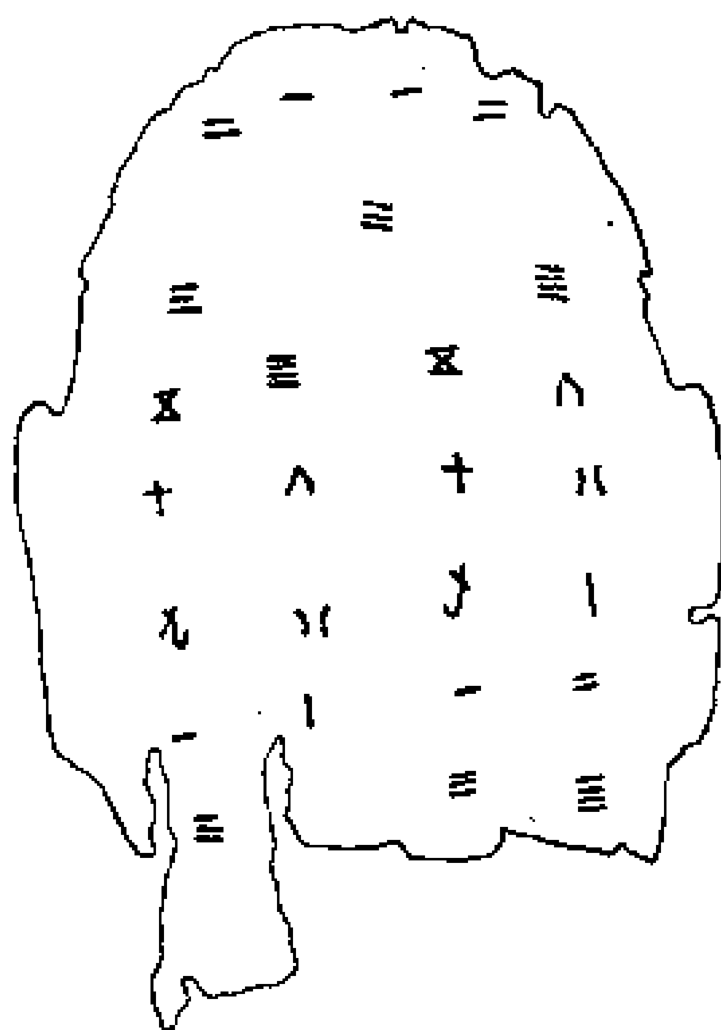
下：



1—26

但是也有不合书的，例如有一片甲骨上把“三十”写作“☰|”，而不是“Ѱ”或“丗”，等等。一些数目字连书，是采取分地位合书的办法，如“二千六百五十六人”，便写作“乎⊗文∧人”。

在一片甲骨上有由1到10的全部十个自然数（图1—27），没有和实物连在一起，说明商代已经有了抽象的自然数概



1—27　甲骨上的数目字

念。

在商代的记数法中还有一种六十循环的办法，这就是主要用在历法上的所谓“天干地支”。天干有十个，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；地支有十二个，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。从干、支的头一个字甲、子开始依次各取一个，配成甲子、乙丑、丙寅、……干或支完了接着再取，直到癸亥，共取六十次。以后又是甲子等出现了循环。在一片甲骨上就有一个完整的甲子表，至于零散的甲子纪年纪日的甲骨就更多了。这种干支纪年法后来一直沿用，现在农历还在使用。

甲骨文中数目字的写法是从新石器时代的刻划符号发展而来的。数学的“数”字是从结绳的形象而来，甲骨文中“数”字写做“數”，从娄从系，就是将绳子打上结，束成小把以计算。

商代至少应有加法、减法和乘法运算，只是没有明确的记载。实际上，甲骨文只能记录结果，而不能记载算法和运算过程。但是通过一些实例可看出其算法。在一片甲骨上，记载了如下的数字：

五十犬，五十羊，五十豚①，
三十犬，三十羊，三十豚，
二十犬，二十羊，二十豚，
十五犬，十五羊，十五豚。②

全是5的倍数，而前三排又都是10的倍数。

① 豚音屯 tún，小猪。
② 《殷墟书契前编》。

周以后有了运算的记载，例如在周代的一件铜器上有“东宫廼曰：偿曶① 禾十秭②，遗十秭为廿秭。（如）来岁弗偿则倍卌秭③。”秭是后来的大数名称，指万亿，这段文字是说偿还奴隶主曶庄稼（禾）十秭，同时要送给他十秭，共为二十秭。如果第二年不偿还，就要增加一倍为四十秭。实际上这已包括$10+10=20$和$20\times2=40$两种算法——加和乘。

战国时，李悝④ 倡“尽地力之教”，他算了一笔账：“今一夫挟五口，治田百亩，岁收亩一石半，为粟百五十石($1.5\times100=150$)，除十一之税十五石$\left(\frac{150}{10}=15\right)$，余百三十五石（$150-15=135$）。食：人月一石半，五人终岁为粟九十石（$1.5\times12\times5=90$），余有四十五石（$135-90=45$），石三十〔钱〕，为钱千三百五十（$45\times30=1350$），除社闾尝新春秋之祠用钱三百，余千五十（$1350-300=1050$）。衣：五人终岁用千五百,不足四百五十($1050-1500=-450$)。……”⑤ 这里已讲到了减法、乘法和除法，特别是最后的一次计算出现了不足，用现代的观点来看就是有了负数。李悝未必懂得这个意义，但是却为负数概念的出现提供了来源。

由于重复计算的需要，我国古代早已出现了乘法口诀，但是直到春秋战国时代的文献中才有了不完全的记载；而且次序与现代不同，由“九九八十一”开始，因此又称这种口诀为“九九”。

---

① 曶音虎 hū，在这里是人名。
② 秭音子 zǐ。
③ 郭沫若：《奴隶制时代》卷首插图及释文。
④ 悝音魁kuī。
⑤ 《汉书·食货志》。

2．分数的广泛应用。至迟在春秋战国时代我国已经有了分数概念。在春秋战国（特别是战国）的著作中记载了许多分数及其应用的例子。当时社会上思想活跃，生产活动的范围有所扩大，技术水平也有提高，实践中提出了许多新的数学问题。比如不够一个整体的物体就不能用自然数表示其数量，而必须创造新数。在《墨子》、《管子》和《商君书》等书中所记载的分数大都是由于分配而引起的。例如《墨子》讲到食盐的分配时就有“二升少半”和“一升大半”的记载。其中“少半”和“大半”即$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$，还有“半”为$\frac{1}{2}$，都是当时分数上专用的名词。《管子》在讲土地种植的分配时有“十分之二”、“十分之四”、“十分之五”、“十分之六”、“十分之七”等分数。在另一处也讲到了“五升少半”、“三升少半”。在《商君书》中有这样的记载：“地方百里者，山陵处什一，薮泽处什一，谿谷流水处什一，都邑蹊道处什一，恶田处什二，良田处什四”，就是说一百平方里的地面上各种地貌所占的比例，前四种都是$\frac{1}{10}$，后两种各为$\frac{2}{10}$和$\frac{4}{10}$，加起来为$\frac{10}{10}$(＝1)。战国时代在制造量器“商鞅量”时也用到了分数，规定“积十六尊五分尊一为升”。“尊”就是寸，这句话是说1升＝$16\frac{1}{5}$（立方）寸。

在《考工记》中记载了由于制造各种器具和器具规格的需要而大量使用了分数，特别是有了分数运算。例如“六分其轮崇，以其一为牙围，叁分其牙围漆其二”，这里说的是1牙围＝$\frac{1}{6}$轮崇；一牙围的$\frac{2}{3}$要上漆。《考工记》中还记载了一种叫做殳①的竹制兵器的规格，“凡为殳五分其长以其一为之被而

---

① 殳音殊shū。

围之，叁分其围去一以为晋围，五分其晋围以其一为首围”。意思是说 1 围 $=\frac{1}{5}$ 长，1 晋围 $=1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，1 首围 $=\frac{1}{5}$ 晋围。

这些事实有力地说明了我国早在公元前四、五世纪就已建立了分数概念并有了广泛的应用。

春秋战国时由于制造衡器和乐器的需要，也用到了其它一些数学知识。例如战国墓葬中出土的天平砝码的重量以 1、2、4、8、……递增，相当于以等比数列 2^0、2^1、2^2、2^3、…递增。这种数列的出现，显然是当时以十六两为一斤的规定而来的。在乐律研究中有“三分损益法”，用到分数运算。在《管子》一书中有“先主一，而四之三开，以合九九”的记载，相当于 $1\times3^4=9\times9=81$，这已有了指数的初步观念。

1978年，湖北随县曾侯乙墓出土的磬匣上都用汉字标记了号码。值得注意的是在标记号码中数字“亖”改为“㇐”，这是汉字由“ ”到“四”的过渡形式。其余字形大体和甲骨文差不多。但是非十的倍数的写法有了变化，如 41 写作卌，等等。

工程中的测绘与几何问题

和数的概念一样，形的概念在我国奴隶社会也有新的发展。为适应各种社会活动（特别是生产实践活动）的需要而大大丰富了几何知识的内容。在夏商时代已开始兴修水利工程，传说夏禹曾领导治水，甲骨文中有了“正河”的记载。“正河”就是兴修水利。当时城堡、房屋建筑的规模也很大，所有

这些工程都要用到测绘和几何学知识。

1．**测量与绘图工具的起源**。土木工程和工具的制造等都需要测量，而测量又需要一定的几何知识和必要的工具。例如在河南偃师二里头发掘出来的早商时代宫殿遗址，规模宏伟，光是台基面积就约有一万平方米，墙基很直，柱孔排列整齐，分布均匀。①这样的大型建筑，必须通过测量才能办到。

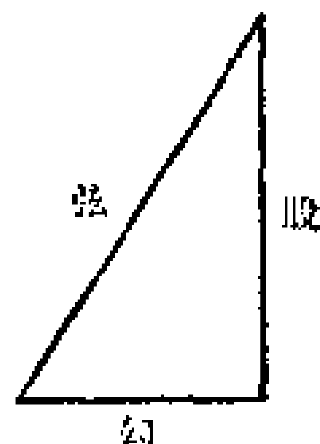
《史记·夏本纪》在讲到夏代的一次治水工程时说："陆行乘车，水行乘舟，泥行乘橇②，山行乘樺③，左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道。"所谓"准绳"，是指水准测量或直线测量，"规矩"则是两件绘图工具，就是画圆的规和画直线及直角的矩。商代的甲骨文中已经有"规矩"二字，规写作"奴"，矩写作"匚"④，后来的矩是拐尺形。既然商代已经有了"规"、"矩"二字的象形文字，那么规矩的发明可能还要早得多。在汉代的许多画面上常见有"伏羲手执规，女娲⑤手执矩"的图象，规是两脚状，和现在的圆规相似，矩是一直角拐尺形。

公元前二世纪成书的《周髀⑥算经》卷上记载："……故折矩以为句⑦广三，股脩四，径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘，得三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所由生也。"（图1—28）这就是说

① 中国科学院考古研究所二里头工作队，《河南偃师二里头早商宫殿遗址发掘简报》，载《考古》，1974年第4期，第234—248页。
② 橇音敲qiāo。
③ 樺音局jú。
④ 李俨，《中国古代数学史料》，1954，中国科学图书仪器公司，第8页。
⑤ 娲音蛙wā。
⑥ 髀音毕bì。
⑦ 句音gōu，与勾同。

在禹治天下时有了"勾三股四弦五"这个勾股定理的特例。

商代已普遍使用车子，仅在河南安阳殷墟就几次发现车子的遗迹①。制造车子需要用到几何知识。轮是圆的，而辐由毂向外射出把圆周角等分，也把圆周形的轮等分。1972年挖掘出来的车轮有22根圆柱形的辐，排列整齐。车的轮牙（辋）一般是由几块弧形构件合成，这就产生了用几段圆弧合并成圆的概念。要做到这一点，事先必须作精细的测绘和必要的计算。但是显然应当使用测绘工具，否则车轮是做不成的。



1—28 勾股形

2．**几何测绘在春秋战国时代的发展**。西周以后的春秋战国时代由于战争和生产的需要，各地修建了不少堤防和水利工程。为了使各项工程合乎需要，必须进行测量和计算。公元前548年，楚国在蒍②地兴修水利工程前作了各种测量，"蒍掩书土田，度山林，鸠薮泽，辨京陵，表淳卤，数疆潦，规偃猪，町原防，牧隰皋，井衍沃，量入修赋。"③公元510年，晋国率各诸侯国为周王筑城，动工之前，"士弥牟营成周：计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迩，量事期，计徒庸，虑材用，书糇粮，以令役于诸侯，属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命。"④这些记载说明，早在两千四、五百年前，水利工程中要进行距离、高低、

① 中国科学院考古研究所安阳工作队：《安阳新发现的车马坑》，载《考古》，1974年第4期，第24—28页。

② 蒍音委wěi。

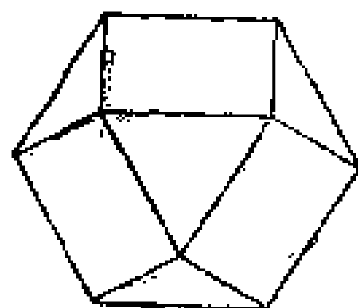
③ 《左传》襄公二十五年。

④ 《左传》昭公三十二年。

厚薄、土方等测量，同时还包括工程期限、劳动力多少和分配、所需粮食、材料等方面的计算。很显然，在这类工程中会遇到大量的几何问题，必须运用几何知识才能解决。如计算土方实际上就是体积计算。最简单的立体是立方体，稍复杂一点的是正四棱台，都应当有计算法则。城墙的修筑，同样需要几何知识，《墨子》中有关于城墙、城门、垛口、城楼等一系列的计算问题①，都与立体几何有关系。

春秋时期，在一些经济发达的地区已经有了封建生产关系的萌芽。公元前594年鲁国（今山东南部）开始实行"初税亩"制度，不论公私田地要按亩纳税。这就要求人们去研究面积的计算问题。虽然在当时的书籍上还没有找到有关面积计算的记载，但是估计当时对于正方形、长方形、三角形、梯形、圆等的面积计算法则已相继产生了。

在春秋战国之际的遗物中，有各种形状的磨制品，其中最引人注意的是1971年在山东临淄郎家庄出土的约公元前500—400年的殉人墓中水晶珠②（图1—29）。这种水晶珠呈简单的半正多面体形状，通过观察，可知其磨制过程：先把水晶块磨成正六面体，再磨去八个角（有一定要求），便成为一种半正多面体。它的表面由六个相等的正方形和八个相等的正三角形构成，并且所有的二面角都相等。在同一殉人墓中出土的一件漆器上画有很规则的同

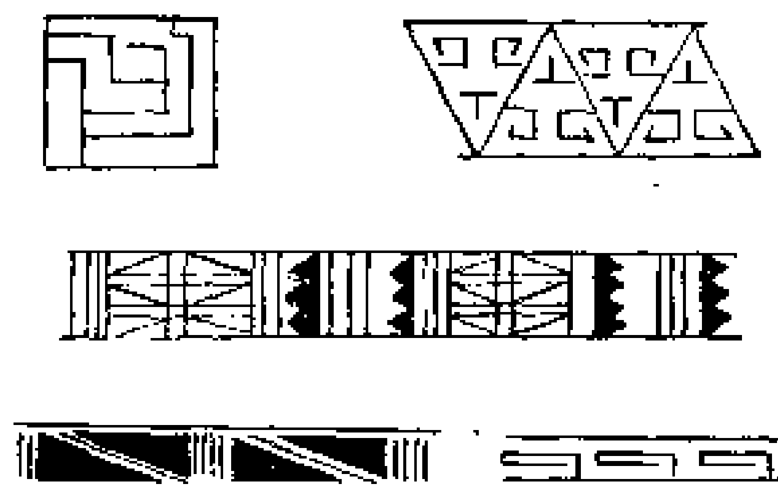


1—29　半正多面体水晶珠

①　《墨子》卷四十。

②　山东省博物馆：《临淄郎家庄一号东周殉人墓》，载《考古学报》，1977年第1期。

心圆、正方形、平行线、三角形、平行四边形、菱形、长方形等各种几何图形（图1—30）。



1—30　郎家庄出土漆器的几何图案

战国时期已经有了很好的技术平面图，例如在一些漆器上有船只、兵器、建筑等图形，其画法符合正投影原理。在河北省出土的战国时中山国墓中的一块铜片上有一幅建筑平面图，表现出很高的制图技巧和几何水平。

当时，在制造各种工具、器械、乐器过程中，常常会遇到需要把两个棒形物曲折相接，或者是将金属板、木板作成多边形，这就要用到角的概念。在《考工记》一书中有不少这方面的记载。这本书对于角和几种特殊角都有专门名称，把非直角的角叫做“倨句①”，“倨”是钝角，“句”是锐角。直角叫做“倨句中矩”或简称“一矩”，例如“磬氏为磬，倨句一矩有半”。“磬”是古代的一种石制乐器（图1—31），常把大小不等的几个磬按大小次序为一组吊起来敲打发声。“磬氏”是指制造石磬的工匠。“倨句一矩有半”是指石磬背部的折角的规格，其大小是一个直角（矩）再加



1—31　古磬的线图

① 倨句音具勾jù gōu。

上半个直角，相当于 $90°+\frac{1}{2}\times 90°=135°$。在同一书中还有关于车辆规格的记载，包括一些构件角度大小的规定，并且把不同角度的构件取了专门名称，即“车人之事：半矩谓之宣，一宣有半谓之欘①，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”角度的大小相当于：

宣为 $\frac{1}{2}\times 90°=45°$

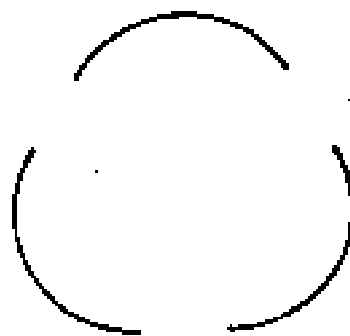
欘为 $45°+\frac{1}{2}\times 45°=67°30'$

柯为 $67°30'+\frac{1}{2}\times 67°30'=101°15'$

磬折为 $101°15'+\frac{1}{2}\times 101°15'=151°52'.5$

“磬折”就是石磬背部的标准折角。《管子·弟子职篇》中也有“俯仰磬折”和“倨句如矩”这样的话。

《考工记》还记有“筑氏为削：合六而成规；天子之弓，合九而成规；诸侯之弓，合七而成规；大夫之弓，合五而成规；士之弓，合三而成规。”是说制造弓的规格，每张弓都成一圆弧形状，使几张弓合在一起构成圆周（图1—32）。但是要根据当时的社会等级的要求去制弓。一般人用的弓六张合在一起为一圆周，天子用的弓九张合在一起为一圆周，等等。这里已经包含着明确的等分圆周概念。如果把弓上的弦联在一起考虑，就构成了圆内接正六边形、正九边形、正七边形、正五边形、正三角形。



1—32 “合三而成规”图

在春秋战国时代的文献上常常把测量和绘图记载在一起。

① 欘音竹zhú。

实际上，两者之间有密切的关系。当时测量的内容已经比较齐全，包括直线测量、水准测量、垂直测量等，分别叫做“绳墨”（或“准绳”），“水”和“悬”等。“绳墨”就是打墨线以取直，“水”是以水平面为标准测量坡度和高程，“悬”是用悬垂的线以定垂直。《考工记》中说：“匠人建国，水地以县（悬）”，这就是垂直和水平的关系：悬垂的线和水平面互相垂直。还有“衡者中水”，也说的是以“水”测定平衡。匠人在进行建筑之前要通过“悬”、“水”进行测量。当时作为诸侯国的有名工匠，必须达到“可规可萬① 可县可水可量可权”，就是要掌握画圆、画直、垂直测量、水平测量、容积测量（“量”）和重量测量（“权”）六种技术才能称之为“国工”。这些测绘技术都与几何有直接关系。在《墨子》等书上也有“直以绳，正以县”等记载，这两句话是指用“绳”取直，用“县”（同悬）取正。

以上事实说明，到了春秋战国时代，由于社会生产的发展以及兼并战争的需要，已经积累了较为丰富的几何知识。

组合数学②和运筹③思想的萌芽

1．《易经》中的组合数学思想。一些现代形成独立分支

---

① 萬即矩。

② 组合数学一般研究有限个元素在某些事先指定的约束条件下如何排成一些集合，如幻方（纵横图）、排列组合等都属于组合数学。

③ 运筹学是本世纪四十年代形成的一门数学学科，主要研究经济活动和军事活动中通过数学的分析和计算作出综合的合理安排，以达到较有效地使用人力物力的目的。它又包括对策论（博弈论）、规划论、排队论和质量控制等主要分支。

的组合数学和运筹学，其思想萌芽可以在我国遥远的古代找到踪迹。这些早期的数学思想萌芽对现代科学的发展产生过一定的影响，被国际上所重视。流传至今最古的典籍之一——《易经》中已有组合数学思想的萌芽。这是一部讲卜筮① 的书，通过阴阳卦爻②，预言吉凶，本来是宣扬迷信思想，但其中包含一些数学内容。

卦爻用两种符号表示："——"是阳爻，"- -"是阴爻。把两爻按照不同的次序排列变成"四象"、"八卦"、"六十四卦"（图 1—33）。八卦又配上"乾"、"坎"、"艮"、"震"、"巽"、"离"、"坤"、"兑"八个字，代表八个方向（图 1—34）。四象、八卦、六十四卦等的排列方法相当于数学中的重复排列。假如有 n 种相异物件，每次取 r 个，按不同形式排列，共有 n^r 种排列法，即

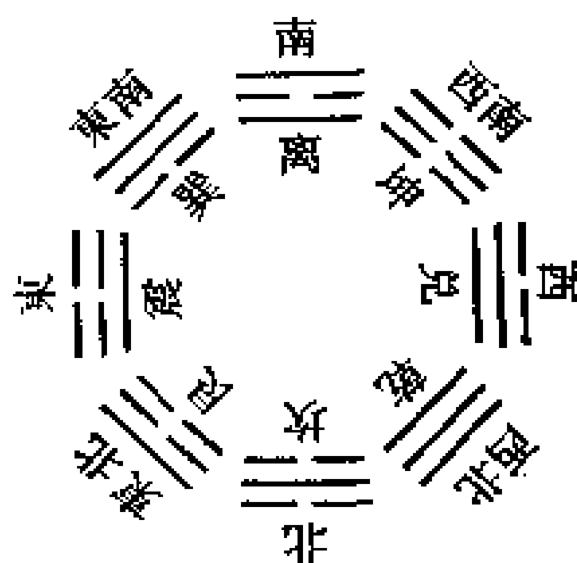
$$n^r=\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{r\text{个}}$$

阴爻和阳爻是两种物件，每次取两个，计算得 $2^2=4$，就是

四象 ⚌ ⚍ ⚎ ⚏

八卦 ☰ ☱ ☲ ☳ ☴ ☵ ☶ ☷

1—33 四象与八卦



1—34 八卦的排列

① 筮音是 shì，古代占卜用的草或竹棍。
② 爻音姚yáo。

四象；每次取三个，即有：$2^3=8$，就是八卦；每次取六个，即有：$2^6=64$，就是六十四卦。还可以有另外一种算法，把——和－－各与——、－－排列一次，就由两仪得到四象；再把——和－－与四象各配一次，就由四象得到八卦；把八卦的每一卦都和八卦相配一次，就得到"八八六十四卦"。古代是按后一种方法计算的，但和前一种方法一样（当时人们不一定知道算法的原理，然而实际上是用到了）。卦爻还反映了二进制思想。如果把——和－－用记号1和0代替，八卦就可分别表示为000（坤）、001（艮）、010（坎）、011（巽）、100（震）、101（离）、110（兑）、111（乾），这就是现代二进制记法。

八卦传入欧洲后，德国数学家莱布尼兹（Leibniz，公元1646—1716年）很感兴趣，并作了研究，从而建立了二进制。他对于《易经》中的八卦评价很高，写道："易图是流传于宇宙间科学中之最古的纪念物。"由于《易经》中有"古包羲氏始作八卦"（包羲即伏羲）这样的话，莱布尼兹建立二进制自认为是受了伏羲的启发，"我之不可思议之新发现……就是对于理解三千余年前中国最初的君王且为唯一的哲学者伏羲之古代文字的秘密的发现，对于中国人实在是深可庆幸的事情，应该允许我们入中国吧！因为这包藏着不可思议的神秘（Mystie Chbalistigue）的中国人，已经丧失了他的二千年前传说的文字秘密，可是现在居然发现了从来未试用的计算方法。"①二进制是电子计算机所采用的主要进位制，近些年有人曾撰文论述八卦和电子计算机的关系。

① 〔日〕五来欣造著，刘百闵、刘燕谷译：《儒教对于德国政治思想的影响》（转引自丁超五《科学的易》）。

2．春秋战国时期运用筹划的事例。运筹学的早期萌芽常常以运用筹划，进行斗智的形式出现。当时，由于军事、游戏和其它方面活动的需要，运筹的思想有了发展。《孙子兵法》、《孙膑兵法》、《管子》等书中都有对策思想。战争和某种游戏都带有对策性，古代常用“运筹帷幄①”这样的话说明运用筹划，以克敌制胜。春秋末期的著名军事家孙武就是一位善于运用筹划的人，他总结了许多战争的规律，著有《孙子兵法》一书，论述有关战争胜负的各种条件。例如书中讲了在作战中以少胜多，以弱敌强要以“我专为一，敌分为十，是以十攻其一也，则我众而敌寡”的思想为指导。这里说的是集中自己的兵力“我专为一”，分散敌人的兵力（“敌分为十”），用集中的兵力去攻击分散之敌（“以十攻其一”）。后来战国时期著名军事家孙膑也特别注意用以少胜多的思想指导作战②。

下面举例说明当时运筹学思想，特别是对策论思想的初步运用。

“孙膑斗马术”问题。齐威王要和田忌赛马，每人各有上、中、下马一匹，而田忌的三匹马都不如齐威王的三匹马。竞赛分三场进行，如果按同等的马竞赛三场，田忌肯定是场场皆输。这时孙膑给田忌出了个主意：用下等马对齐威王的上等马，用上等马对齐威王的中等马，用中等马对齐威王的下等马。田忌采纳了这个建议，竞赛的结果田忌取得了一负两胜的成绩③。这个事例的基本思想是用一场的失败而换取全盘的胜

① 帷幄音维握wéi wò。

② 詹立波：《〈孙膑兵法〉残简介绍》，载《文物》，1974年第3期，第40—46页。

③ 《史记》卷八、五十五、六十五、九十一。

利，是对策论中争取总体最优的范例。

在当时的游戏中，运筹思想也是明显的。如六博戏就是要讲对策，结局主要是由双方对策的优劣而决定胜负。六博游戏在春秋战国时期已很普遍，由一个方木盘和棋子、箸子做用具进行。在湖北云梦战国末期墓葬中出土了一套六博棋，有骨制棋子六个，均为长方体，一个较大的涂红色，其余的涂黑色，还有长为19.5厘米的竹箸六根。①

“博弈论”或“对策论”之称，就是根据有利害冲突的双方在竞争活动中研究制胜的最优策略而来。不过，早期的运筹思想还没有能够用明显的数量关系进行描述。

理论研究的尝试与对数学起源问题的认识

数学知识通过长期积累，内容日益丰富，人们必然要进行理论研究和提出看法。这两种情况在春秋战国时代都有了明显的表现。

1. 墨家学派及其它学派的理论研究。《墨子》等书中所讨论的几何概念就是数学理论研究在我国的最初尝试。《墨子》一书是墨家学派的著作，它包括丰富的科学知识。在《墨经》②部分对光学、力学、逻辑学和几何学等方面的问题都试图从理论上进行探讨。墨家学派在某些方面和稍晚的希腊学者亚里士多德（Aristotle,公元前384—322年）很相似。如果说

---

① 湖北孝感地区第二期亦工亦农文物考古训练班：《湖北云梦睡虎地十一座秦墓发掘简报》，载《文物》1976年第9期，第51—61页。

② 《墨子》一书中包括“经上”、“经说上”、“经下”和“经说下”四篇，合称《墨经》。

亚里士多德是西方形式逻辑系统的创造者①，那么墨家学派则是东方形式逻辑的鼻祖。亚里士多德曾尝试把形式逻辑用于数学（主要是几何），墨家学派也是这样。

《墨经》中载有墨家给一些几何概念所下的定义，如：

“平，同高也”。这是“平”的定义，可能是指平行线。

“直，参也”。这是直线的定义，“参”就是“三”，是说三个点共线的问题。

“同长，以正相尽也”。这是对两线段相等的定义，“正相尽”是说正好重合的意思。

“中，同长也”。这是对线段中点的定义。“中”即线段的中点，“同长”是说中点到线段两个端点的距离相等。

“圜，一中同长也”。“圜”就是圆，这是关于圆的定义。“一中”是说有一个中心，“一中同长”是说到一个中心有相等距离的点所构成的图形。

“方，柱隅四匝也”。这是关于正方形或矩形的定义。

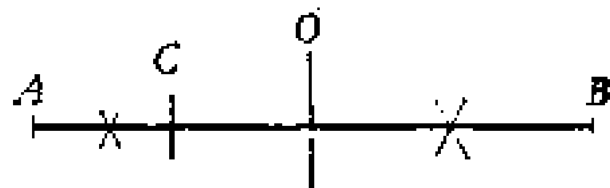
此外《墨经》还有关于点、线、面、体的说明，以及它们之间的关系。书中把点叫“端”，线（或线段）叫“尺”，面叫“区”，体叫“厚”。有一条记载很重要，即“穷，或有前不容尺也”，意思是：用一个线段去量另一个线段总能量到不够量的时候。

所有这些都是试图运用形式逻辑方法定义几何概念。尽管有些说法不太清楚，也没有形成逻辑系统，仍然是非常宝贵的。

---

① I.M.Bocheński,Ancient Formal Logic,1963, Amsterdam, pp.19—71。

墨家学派还讨论过分割物体的问题。《墨经》中说把一个物体平分为两半，再将其中一半分为两半，如此继续分割下去，总能分割到一个不可分的“端”。这个“端”在那里呢？把分割下的前一半保留，而弃去后一半（图1—35中OB），再弃去前一半的前一半（图1—35中AC），一直这样分割和继续舍弃，最后就得到一个不可再分的“端”。



1—35

这个“端”和古希腊哲学家德谟克里特（Democritus，约公元前460—357年）的“原子”很相似。但是墨家学派承认有无穷大存在，《墨经》上写道：“莫不容尺，无穷也”，就是说有这样一种量：用任意长的线段去量它，它都能容纳得下，这显然是一种“无穷大”思想。

《庄子》一书记载说：“至大无外，至小无内”，前半句是无穷大的意思，后半句是无穷小的意思。同书《天下篇》还说：“一尺之棰①日取其半，万世不竭。”就是把一个一尺长的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，如此下去，永远也不会取完。第一天所取为$1/2$，第二天所取为$1/2^2$，第n天所取为$1/2^n$，不论n为多大的数，$1/2^n$总不为零。这就是说，相当于命题

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\to 0$$

就是永远也取不完。

2．对数的起源问题的认识。春秋战国时代人们对数的起源问题也提出了一些看法，有些看法对后来的影响很大。

① 棰音垂chui，木棒。

数和物质的关系是数学中的一个很重要的哲学问题，人们必须作出回答。最先回答这个问题的是《老子》一书，该书下编第四十二章写道："道生一，一生二，二生三，三生万物。"这里把"一"看成是万物的源泉，有了"一"就可以有万物，而"一"又是从一种非物质的"道"生成的。这种说法颠倒了数和物质的关系。本来是物质在前，数在后，但是这里却把物质说成是数的派生物。古代希腊的毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前六世纪人）学派提倡所谓数为万物之源说，把数看做万物的本源，和《老子》中所说的"三生万物"本质上是一致的。

在战国时期，还曾流行过一种观点，把一切事物的起源全部归功于某些个别人物，甚至是神话传说人物。比如说"隶首造数"，"大橈作甲子"，"倕为规矩"等等都是。本书第一节所讲述的事实充分说明，数学的起源不是个别人物创造的，而是人们长期实践积累的结果。如果把"隶首"、"大橈"、"倕"等看作是群众的代名词，那是可以接受的。

第三节　秦、西汉时期的数学与筹算

公元前221年，秦统一全国，建立了中央集权。继之而起的汉王朝长期统一、较稳定的政治局面为生产的迅速发展创造了条件。由秦到西汉末的二百多年间，我国的农业、手工业和其它事业都有了很大的发展，科学技术也呈现出一派繁荣的景象。数学在各方面得到了广泛的应用，在实际应用中又有了新的积累和发展。

汉简中的数学知识

在纸张出世以前，除帛①以外，竹是书写的主要材料，即把文字刻或写在竹片上，再用绳穿在一起而成册。秦汉时期的竹简已在许多地方发现，大都为汉简，包括居延汉简②、武威汉简③，以及近年来出土的银雀山汉简④、云梦睡虎地秦简⑤和江陵汉简牍⑥。其中数学内容最多的是居延汉简，在全部一万多枚中，有不少写着具体的年月日。大部分都是西汉的，最晚的到东汉初（公元一世纪初）。在这部分汉简中，数学的内容最为丰富。

1. **加减法的应用实例**。汉简中有关算术四则运算方面的问题很多，而且都是和当时的记帐、分配、统计等有关，这里先举些有关加减的例子。

在一片竹简上写着：

"董次入谷六十六石，直（值）钱二千三百一十，入钱二千一百八十七，凡四千四百九十七。"⑦就是 2310+2187=4497钱。这是四位数的加法。

还有一条记载当时一个人的主要财产（包括奴婢）的统

① 帛音薄 bó，丝织品的总称。在发明造纸以前，有钱人常在帛上写字或画图。
② 是指在甘肃省居延海附近发现的汉代竹简。
③ 是指在甘肃省武威县境内发现的汉代竹简。
④ 是指在山东省临沂县银雀山发现的汉代竹简。
⑤ 是指在湖北省云梦县睡虎地发现的秦代竹简。
⑥ 是指在湖北省江陵县凤凰山发现的汉代简牍。
⑦ 中国科学院考古研究所：《居延汉简甲编》，1959，科学出版社，第66页，第一五七四简。

计："小奴二人直三万，用马五匹直三万，宅一区万，大婢一人二万，牛车二辆直四千，田五顷五万，轺车一乘直万，服牛二六千，凡訾直十五万。"① 这也是加法，一共有八项。用现在的写法即：

$$30000+20000+10000+20000+4000+50000+$$
$$+10000+6000=150000$$

还有一条记载给戍卒240人粮食的问题，"出谷四百六十四石"，有三种粮食，即"廿九石粟，二百九十石糜，百卌五石麦"，② 也就是464石＝29石＋290石＋145石。

分数的加法也不少。例如有一条记载可能是说一个戍卒的家属用粮数，"妻大女止年廿一用谷二石一斗六升大，弟使男崚年十二用谷二石一斗六升大，凡用谷四石三斗三升少"③，其中"大"指大半，即$\frac{2}{3}$，"小"指小半，即$\frac{1}{3}$，其算法是

$$216\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=433\frac{1}{3}$$

又有一条与此类似的记载，"妻大女止氏年廿六用谷二石一斗六升大，子使女捐之年八用谷一石六斗六升大，子使男并年十用谷二石一斗六升大，凡用谷六石。"④ 即

$$216\frac{2}{3}+166\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=600\text{（升）。}$$

加法与减法出现在一条记载上的也有。一个人从另一个人那里"得粟三石直三百六十，粟三石直三百六十，它钱三百五

① 劳榦：《居延汉简考释释文之部》卷三，1949，商务印书馆，（一四六）三七·三五。
② 同前页⑦，第106页，（附八）简。
③ 同前页⑦，第11页，（二〇二）简。
④ 同前页⑦，（二〇三）简。

十，凡得千一百，少二千四百三□。”①前面四句讲的是加法运算360＋360＋350＝1070。这里因文字有误，算得结果少30。重要的是三项加起来不能抵偿债务，尚“少二千四百三□”（最后一字不清，可能是十），这是在一个负数上加上1100得到负数2430，其算法可能是用的减法。

例如“万岁候长”有“负四筭，得七筭，相除得三筭”②，“相除”就是相减，“负”是欠人家的，算法是 7 − 4 ＝ 3，实际应是 7 ＋(− 4)＝ 3 。

还有一“甲渠候鄣”有一批负算：“大黄力十石弩一右深强一分负一算，坞上望火头三不见所望负三算，八石具弩右弥失负一算，坞上望火头二不见所望负二算，六石具弩一空上蜚负一算，□扣弦一脱负二算，六石具弩一衣不上负一算，凡负十一算。”③这里的算法是加法，即“负一算＋负三算＋负一算＋负二算＋负一算＋负二算＋负一算＝负十一算”。按我们现在的算式应为“$(-1)+(-3)+(-1)+(-2)+(-1)+(-2)+(-1)=-11$”。

这几个例子对于说明负数在我国的起源有重要意义。“负”是亏负、亏欠的意思，有深刻的社会含义，最初不会有我们现在的这种认识，但它借用了社会上经济亏欠的意思。

2．乘法与容积计算实例。在汉简中有关乘法和容积计算的实例很多，例如“斗食吏三，一月奉用钱二千七百，一岁奉用钱三万二千四百。”④即2700×12＝32400。又如。“幽光

① 同前页④，第10页（一八八）简。
② 《居延汉简考释释文之部》，卷三，（二三五）二〇六·四。
③ 《居延汉简甲编》，第17页（三六二）简。
④ 《居延汉简甲编》，第3页（二十）简。

粜粟四千石，请告入县官贵市平贾，石六钱，得利二万四千”①，就是4000×6＝24000。有些汉代的木牍上也有大量的乘法记录，湖北江陵凤凰山十号西汉墓出土的木牍中记有“二月百一十二筭，筭卅五钱，三千九百廿正”②，即112×35＝3920。“四月百九筭，筭九钱，九百八十一正”③，即109×9＝981。同墓出土的竹简上有加法计算，如“邓得二，作甲二，宋则二，野人四，凡十筭”④，就是2＋2＋2＋4＝10。例子很多，不再列举。

在汉代，量器有大小两种，如大石小石，它们之间有固定的比例，这在竹简中也有反映。如“入糜大石八石七斗为小石十四石五斗”⑤，大小石之比为87∶145＝3∶5，就是大石三石合小石五石。还有其它一些例子，都是这个比例。可见当时的比例概念已很清楚。

汉简中也有关于面积的计算，特别是长方形面积的计算。例如“守望亭北平第九十三町，广三步、长七步，积廿一步。”⑥即长×宽＝3×7＝21（平方）步。又如“一人草涂（侯）内屋上广丈三尺五寸、长三丈，积四百五尺。”⑦即13.5×30＝405（平方）尺。又如“四人马夫涂□□，长四丈九尺、广六尺，积二百九十四尺。”⑧即49×6＝294（平方）尺。还有一些问题，先求出面积，然后再几个人平分，例如

① 同前页④，第9页（一七七）简。

②③④ 弘一：《江陵凤凰山十号汉墓简牍初探》，载《文物》，1974年第6期，第78—84页。

⑤ 同①，第104页（二五四九A，B）简。

⑥ 同①，第67页（一五九五）简。

⑦ 《居延汉简考释·附录·敦煌汉简考释》，102*(47)235×10（王·戍役二十七）。

⑧ 同⑦，105(271)234×10。

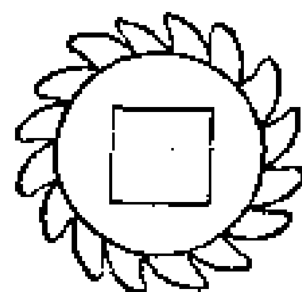
"三人马夫涂□上内地广七丈、长十丈四尺，积七百廿八尺。率：人二百卌尺…"①，即 $7\times104=728$（平方）尺，三人平分：$728\div3\approx240$（平方）尺。

我们还见到一简与长方体的体积计算有关，"轊广八寸、厚六寸、长尺八寸一枝，用土八斗、水二斗二升…"②，前一段是讲轊的容积：广、厚、长各为8、6、18寸。但是没有写出结果来，当时一定进行了计算，所以知道它能容一石二升水和土。

汉代简牍中的数学问题是比较多的，并在各方面有了广泛的应用。

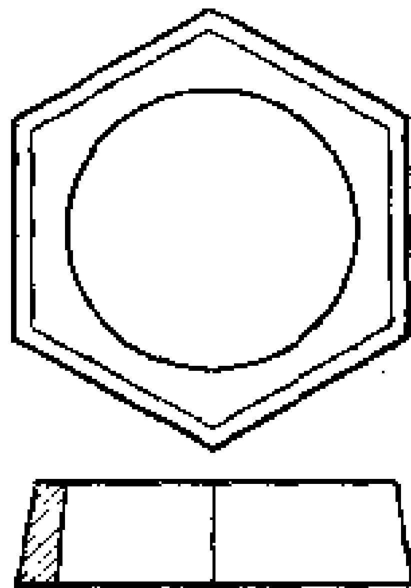
工艺和度量衡中所用到的几何知识

1．工艺中的几何知识。秦汉间各种手工工艺和度量衡都有很大的发展。工艺水平的提高，需要应用许多几何知识，尤其是铸造、简单机械中所用的几何知识更多。当时铜钱是一种主要货币，需要大批铸造；铜镜已普遍使用；齿轮也用于机械制造上。汉代出土的铁齿轮齿形一致、分布均匀（图1—36），制作时需要比较精确的等分圆周技术，否则，两个齿轮就不能很好地啮合。特别是象图中这样的齿轮精确度的要求就更高些。汉代一种正六棱台形的铁制车辋，其上下底均为正六边形，中间为圆


1—36 汉代铁齿轮

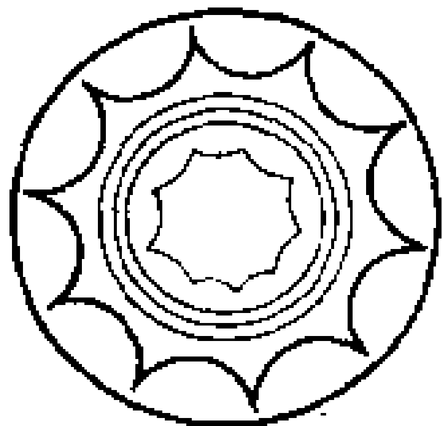
① 同前页⑦，106(261)231×10。
② 同前页⑥，第45页（一〇六六）简。

孔①，是一种规则的几何体（图1—37）。铸造铜钱用的钱范（模子）也具有几何性质，钱模排列整齐，有的排成直行，有的排成三行或均匀的六边形等等。

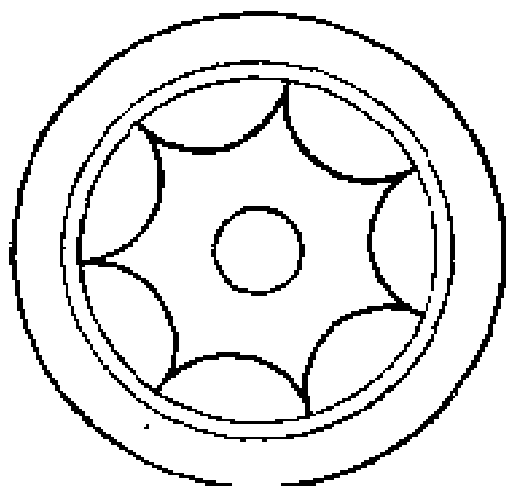


1—37　汉代铁车辖

几何内容最丰富的工艺是铜镜的铸造。秦汉时铸造的铜镜流传至今的很多（图1—38、图1—39）。镜上大都有精致的几何图案，如同心圆组、正方形、平行线、折线、等腰三角形、菱形、圆弧等都是很常见的。铜镜上多数几何图案的绘制最终都要归结为等分圆周或等分圆弧问题。现在见到



1—38　十弧连弧镜



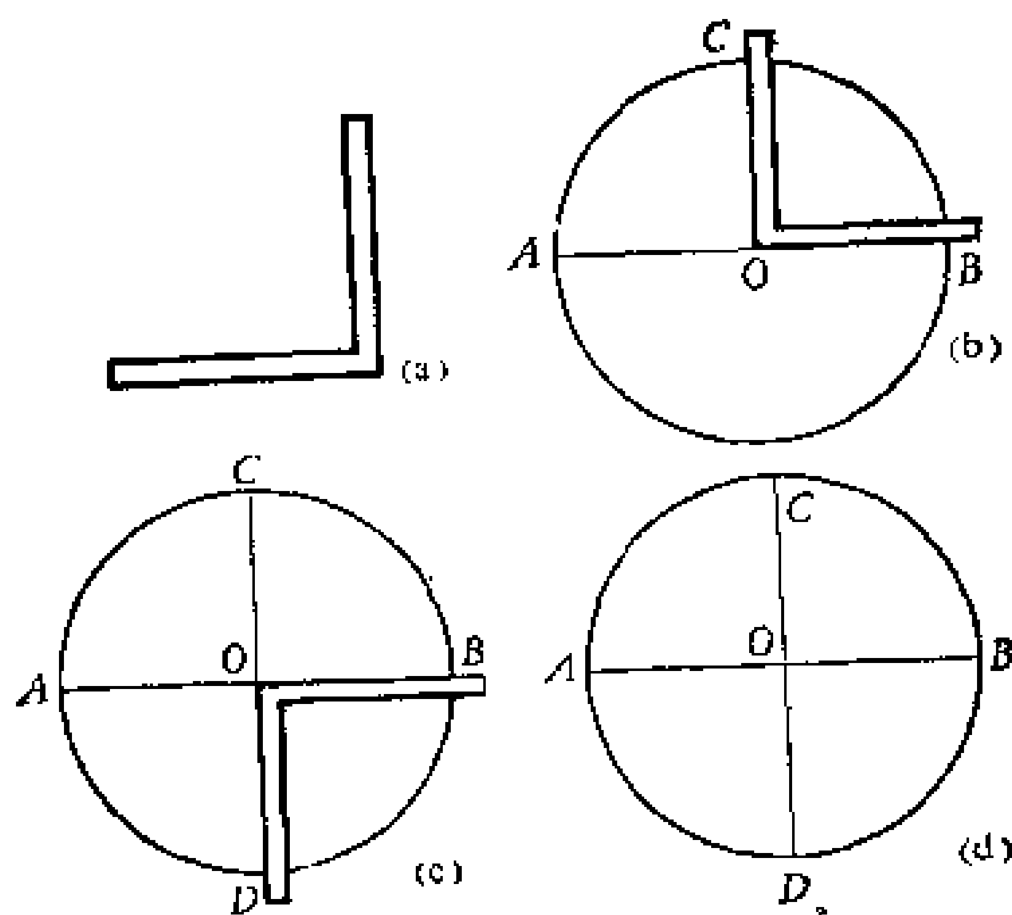
1—39　七弧连弧镜

的有4、5、6、7、8、9、10、11、12、14、16、32、43、62……等分圆周。绝大多数绘制得比较准确，估计应当有一种等分圆周的方法，但目前没有找到记载。根据现代数学理论，7、9、11等分圆周用直尺圆规是不可能的，用我国的规矩也不能都准确地等分出来，因此只能近似地画出。5、10等分圆周，虽然能用直尺圆规

① 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第73—116页。

准确作图，但是在我国古代可能尚未掌握。大概也是用近似方法画出的，只要近似地画出5、7、9、11……就可以用等分角方法逐步得到10、14、18、22或它们的任意2倍数的等分。然而，这些等分在铜镜上少见，最常见的是6、12、8和16等分，特别是8、16等分最多。这是因为6、12、8和16都能用规和矩准确地作图，所以铜镜上出现的也最多。

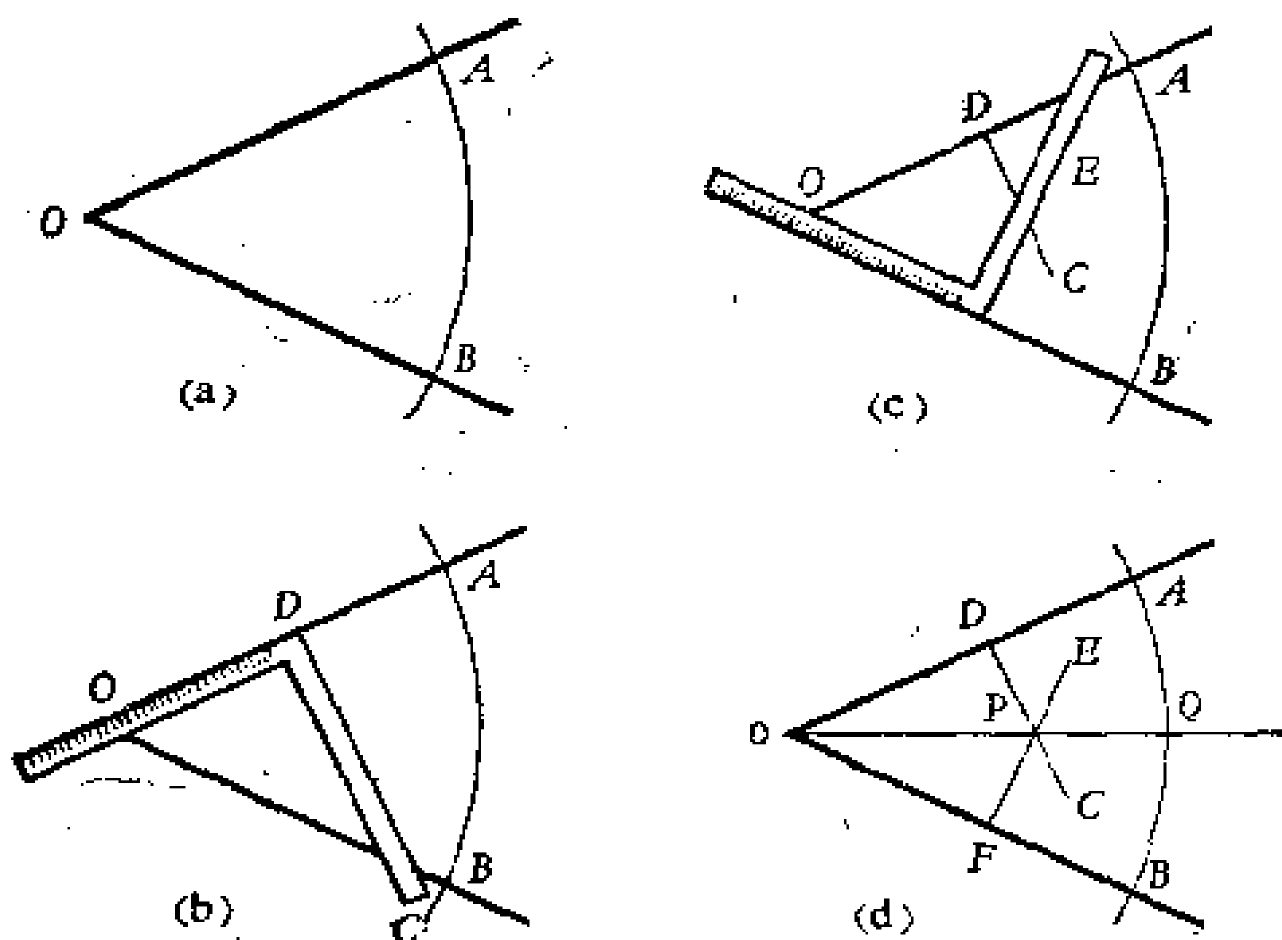
用规和矩很容易4、6等分圆周。圆内接正六边形的一边正好等于半径，其顶点就把圆周6等分。4等分圆周只要先画出圆的一条直径，再使用两次矩，就可作出图来（如图1—40）。



1—40

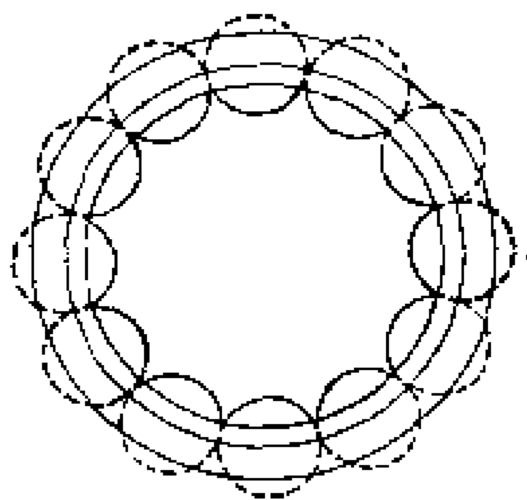
在汉代的铜镜上有不少连弧图案，经测量绝大多数都很准确。在圆形铜镜的边缘绘制均匀的连弧，也必须首先等分圆周。由于古书失载，只能提出猜测性的作法，实际上能等分一已知角就行了。假定∠AOB和弧AB是已知的（图1—41(a)），

用规矩（实际上只用矩而不用规）将它们平分。把矩的一边和角AOB的一边（如OA）对齐，沿另一边画 OA的垂线 DC（如图 1—41(b)）；再把矩翻过来使一边与角AOB的另一边 OB对



1—41

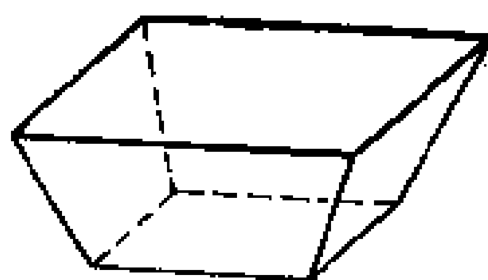
齐，并使对OB之刻度与前者相等，同样画出OB的垂线FE（如图 1—41(c)）。FE与 DC 交于一点 P，连接O、P，延长与弧AB交于点Q（如图 1—41(d)），则 OP是角 AOB的平分线，Q是弧AB的中点。就这样，非常简单地把任一角或弧二等分。其实只用三次矩就够了。



1—42　连弧的作法

圆周上的连弧形几何图案容易作出，按照上面所讲的方法把圆周等分，然后以选定的长度为半径，以各分点为圆心依次画圆，便得到均匀的连弧（图 1—42）。

2．度量衡中所用到的数学。秦汉时代对于度量衡的研究与改革盛于前代，秦始皇统一了度量衡，规定全国使用标准量器。王莽执政时期又重新制定度量衡，于始建国元年（公元9年）造“律嘉量”一百多只，发到全国各地。现在收藏在各地博物馆的秦汉度量衡器物很多，如秦权、汉尺、汉斗（图1—43）、斛、天平以及王莽时的“律嘉量”等，都是研究数学史的重要资料。



1—43　汉斗

在甘肃武威磨嘴子汉墓中出土的一件木斗，口大底小，呈规则的正四棱台状。口的各边均长19、底的各边均长15.3、高13.3厘米，形状和解放前农村使用的斗大体相同。① 它的容积计算公式稍复杂一点，就是 $V=\frac{1}{3}h(a^2+b^2+ab)$（其中 h 是高，a、b 为上、下底一边之长，V 为容积）。至于在西汉时是否已有此公式虽然没有见到明确的记载；但以理推之，应当是有的，否则斗的容积就不会精确。可见当时已用到容积计算公式了。

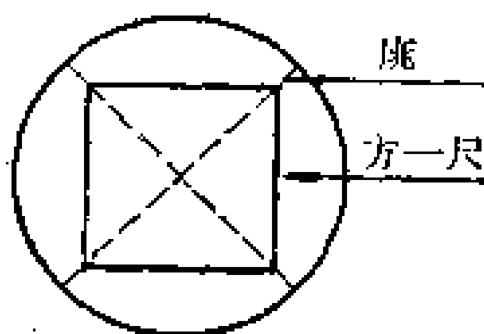
关于王莽的“律嘉量”，因有铭文流传至今，所以容积的大小和计算方法都能弄得较清楚。这种量器据记载包括五个单位，即斛（石）、斗、升、合、龠②，都是十进位，形状都是圆柱形的。五量均有铭文，内容完全一致，只是单位不同。斛的铭文是：“律嘉量斛：方尺而圆其外，庣③旁九厘五毫，幂

① 甘肃省博物馆：《甘肃武威磨嘴子汉墓发掘简报》，载《考古》，1960年第9期，第15—28页。

② 龠音月yuè。

③ 庣音条tiáo。

百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗。”① “庣旁”的意义如图 1—44所示，“幂”就是面积。这个问题显然是通过圆柱形的体积计算得到的。其计算步骤相当于



1—44

$$10\pi\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}+0.095\right)^2=1620\ (\text{立方寸})$$

从这里可以反求出圆周率 π 的值为3.1547。

但是，1956年在河南刘家渠隋墓中发现的一件始建国元年的铜撮，其铭文是：“律，撮，方五分而圆其外，庣旁四毫，幂卌分五厘，深四分，积百六十二分，容四圭。”② 这也是类似圆柱体积的计算，即

$$4\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+0.04\right)^2=162\ (\text{立方分})$$

所用圆周率值与前面的略有不同，这里是 $\pi\approx3.1679$。

从上面的例子可以看出，在西汉的度量衡研制中可能应用了体积计算的正确公式。王莽时用到了两个圆周率值3.1547和3.1679③。

前面讲到的木斗的容积和“律嘉量”的容积之间有密切关系，一木斗约等于一千撮，一斛约等于十斗，近于十进制的斛—斗换算。

① 《西清古鉴》卷四十三。

② 中国科学院考古研究所黄河水库考古工作队：《1956年河南陕县刘家渠汉唐墓葬发掘简报》，载《考古通讯》1957年第4期，第9—19页。

③ 白尚恕先生曾根据各种铭文逆推，得到四个不同的圆周率值，因而认为，王莽时是否创立过圆周率值值得怀疑。见白尚恕：《从王莽量器到刘歆圆率》，载《北京师范大学学报》1982年第2期，第75—79页。

天文历法中的数学知识

秦汉时期，天文历法有了很大的发展。有了连续的天文观测和数十年不间断的记录。秦朝采用颛顼①历，一直用到汉武帝时，后来为《太初历》所代替。西汉时期提出了一些天文假说，主要的有盖天说、浑天说和宣夜说。盖天说认为大地象个平面（后来又修改为中央隆起），天象口大锅扣在地上；浑天说则主张天是球形的，大地在中间；宣夜说把宇宙看作是无限的空间，天体浮生于其中，其运动需要“气”的作用，后一说法比较先进，但未引起人们的注意。“盖天说”的代表作是《周髀》（后人称为《周髀算经》）。天文学的发展，推动了数学的进步，天文学对数学的要求是很高的，没有数学，天文学中的结果和计算问题是无法解决的。

《周髀算经》是公元前二世纪、西汉初的作品，但是它包含了很早以前的史料。除了已经在本书第一节提到禹治水与勾股定理的特殊情形外，还提到周初的商高和周公的问答，时代不明的荣方和陈子的问答，还涉及到战国末期吕不韦的《吕氏春秋》。可见此书最后定本应在战国之后。这本书对数学的应用很广泛。现在把这书在天文学等方面对于数学的应用，作一介绍。

1．分数运算。如果说在此以前已经有了较为简单的分数加减运算的话，那么在秦汉时的天文学研究中则有了较为复杂的乘除法。《周髀算经》关于月亮视运行速度的计算分为以下

---

① 颛顼音专序zhuān xù。

两步进行：

$$383\frac{847}{940}\times13\frac{7}{19}=5132\frac{2698}{17860},$$

$$5132\frac{2698}{17860}\div365\frac{1}{4}=14+\frac{18\frac{11628}{17860}}{365\frac{1}{4}}$$

在讨论所谓“七衡”周上一度弧长时，《周髀算经》也用到了分数除法。七衡就是以北极为圆心在平面上所画出的距离都相等的七个圆圈。例如“内一衡”：周长714000里，用周天度数$365\frac{1}{4}$去除，即

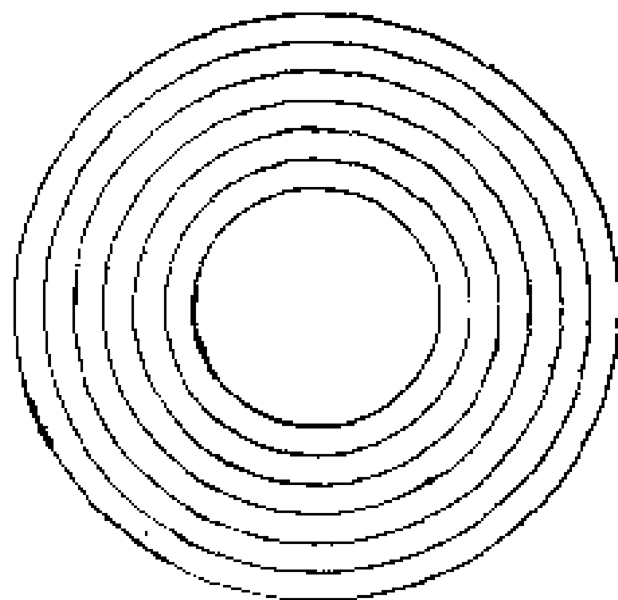
$$714000\div365\frac{1}{4}=1954\text{里}247\frac{933}{1461}\text{步}$$

（当时300步为1里）。其余几衡也都是用类似的计算方法，这里不重复了。

比《周髀算经》稍晚的《太初历》（公元前104年）计算木星的平均速度周期时相当于下面的计算步骤：

$$33\frac{3334734}{7308711}\div398\frac{5163102}{7308711}=\frac{145}{1728}$$

2．等差数列和圆周长求法。上面提到的七衡共有六个间隔（图1—45），《周髀算经》规定“一衡之间万九千八百三十三里三分里之一”，就是相邻两衡间的距离（半径差）为$19833\frac{1}{3}$里。要想求出各衡的直径，只要知道内衡的直径就可以了。《周髀算经》中



1—45　“七衡六间”图

给出计算各衡直径的一般法则，即“欲知次衡径，倍而增内衡之径。二之以增内衡径，得三衡径。次衡放（仿）此”。这段话的意思是说要想求出次二衡的直径，须把半径差二倍再加上第一个圆圈的直径，次三衡以及以后的都这样求。七个直径是：

内一衡径＝238,000里000步

次二衡径＝277,666里200步

次三衡径＝317,333里100步

次四衡径＝357,000里000步

次五衡径＝396,666里200步

次六衡径＝436,333里100步

次七衡径＝476,000里000步

它们每后一衡径减前一衡径的差都是39,666里200步，因此这些数是以39,666里200步为公差的等差数列。这个公差就是相邻两衡间距离的二倍，即39,666里200步＝2×19833里100步。很显然，设内一衡的直径为 D_1，次二衡的直径为 D_2，它们之间的距离为 d，则有关系

$$D_2 = 2d + D_1$$

一般地有

$$D_n = 2d + D_{n-1}$$

其中 $n = 2,3,\cdots 7$。

《周髀算经》求出了每衡的周长，如内一衡的周长为714000里，显然是由内一衡径乘3得到的，即714000＝3×238000。这个3就是 π 的近似值。设 D_n 为直径，L_n 为周长，则有

$$L_n = \pi D_n = 2\pi d + \pi D_{n-1}$$

周长也是等差数列，公差为 $2\pi d$。

《周髀算经》关于等差数列的记载和圆周长求法都是很有价值的内容。

3．一次内插法的应用。《周髀算经》卷下关于二十四节气日八尺标杆影长的数据只有冬至和夏至是实测的，其余都由计算而得。原书是这样说的："凡八节二十四气，气损益九寸九分、六分分之一。冬至晷①长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸。问次节损益寸数长短各几何？"其中"损益"数$99\frac{1}{6}$分的求得是把冬至影长与夏至影长相减，即$1350-160=1190$（分）。因为由冬至到夏至共十三个节气，除去冬至还有十二个，用十二去除上面的差得$1190\div12=99\frac{1}{6}$（分）。设$f(a)$、$f(b)$分别代表夏至和冬至日影长，Δ为损益数，则$\Delta=\frac{1}{12}(f(b)-f(a))$。$f(n)$是夏至到冬至的第$n$个节气的日影长，它的计算公式如下：

$$f(n)=f(a)+n\Delta$$

例如求清明时日影长，便是

$$f(5)=160+5\times99\frac{1}{6}=655\frac{5}{6}\text{（分）}$$

就是影长为"六尺五寸五分，小五分"。计算中的"5"是指清明为夏至以前的第五个节气。夏至以后的节气也这样计算。

上面的公式显然是个一次内插法公式，由夏至到冬至、由冬至到夏至是时间相等的，因此为等间距②。《周髀算经》所载二十四节气日的中午八尺标杆的影长都是利用等间距一次内插法公式算出来的。后来的内插法公式都起源于历法研究，实际是一次内插法的推广。

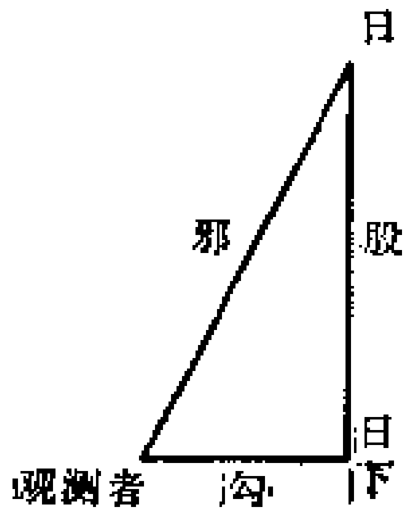
---

① 晷音规guǐ。

② "等间距"的"间"指间隔，而非时间。

插

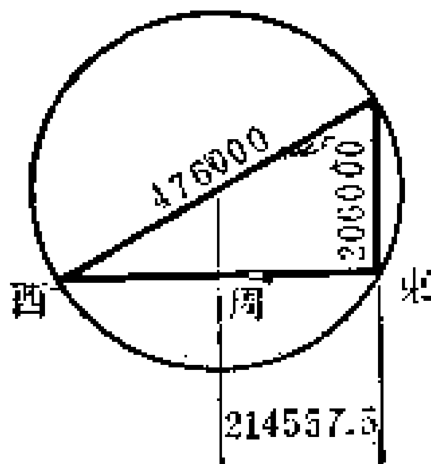
4．勾股定理的应用。《周髀算经》中广泛地应用了勾股定理解决天文问题。实际上，勾股定理决不是西汉时期突然出现的，肯定有很长的历史渊源。我国古代常把大地看作平面，求观测者到太阳的距离就是用勾股定理。《周髀算经》中"求邪（斜）至日者：以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日"（图1—46）。也就是



1—46　"邪至日"图

$$邪至日（弦）=\sqrt{勾^2+股^2}$$

这里所用之勾股定理已不限于3、4、5或它们的倍数，而是推广到了一般情形。又如"冬至之日，正东西方不见日，以算求之，日下至周二十一万四千五百五十七里半"，其意义如图，周径为476000里，勾为206000里，求股，即$\sqrt{476000^2-206000^2}=$ 429115里有奇，这就是圆周上的弦（西东），$\frac{1}{2}\times429115$里$=214557.5$里就是"日下至周"（图1—47）。



1—47　"日下至周"图

从这里可以看出，《周髀算经》已经记载了开平方的方法，而且是任意的正数都能开。《周髀算经》对奇零小数的处理，有时用分数表示，有时以"有奇"笼统地说明存在奇零小数。根据甄鸾注知上面问题的半里之后还应有316775/1716462，而舍去了。

5．一次不定方程问题。我国古代的历法，从《三统历》起要计算所谓"上元积年"，这个问题要归结为解一次不定方

程或一次同余式的数学问题。“上元”就是历法计算中向上逆推而规定的起算点，由上元到制历时所求年累计的年数叫“上元积年”。这种做法，据现在所知，起于《三统历》。它对上元的要求是岁首①在冬至、月首②在朔旦③、日首④在甲子日夜半，同时日月五星同会，满足这些条件的一年为上元。《三统历》中，把年、月、日的最小公倍数叫做“统法”。一统相当于1539年；年、月、日与六十甲子的最小公倍数叫做“元法”，一元相当于4617年，亦即三统为一元。汉太初元年（公元前104年）前十一月甲子、朔旦、冬至会合，很显然，《三统历》的上元积年N应是三统的倍数，即

$$N=4617\times p \qquad (p\text{为整数})$$

为了确定p这个数，《三统历》进一步考虑所谓“岁星超辰”问题。岁星就是木星，在以前人们测得它十二年一周天，故分周天为十二次，每年行一次。但后来发现，实际上木星每144年行145次。因为上述太初元年前十一月甲子朔旦冬至时，木星在婺女⑤六度⑥，所以在$N=4617\times p$年内，木星运行$\left(4617\times p\times\frac{145}{144}\right)$次而到婺女六度，如以12除$\left(4617\times p\times\frac{145}{144}\right)$，所得余数应恰为木星行在婺女六度。经计算，婺女六度约为$\frac{135}{144}$次到$\frac{139}{144}$次之间。于是推算《三统历》的上元归到解一次不定方程

---

① 岁首就是一年开始的日子。
② 月首就是一朔望月开始的日子。
③ 朔旦就是新月的早晨。
④ 日首就是一日开始的时刻。
⑤ 婺女是十二次的一次的名称。
⑥ 我国古代把一圆周分为$365\frac{1}{4}$度，与现用者不同。

$$4617 \times p \times \frac{145}{144} = 12q + \frac{r}{144}$$

即

$$4617 \times 145 \times p = 1728 \times q + r$$

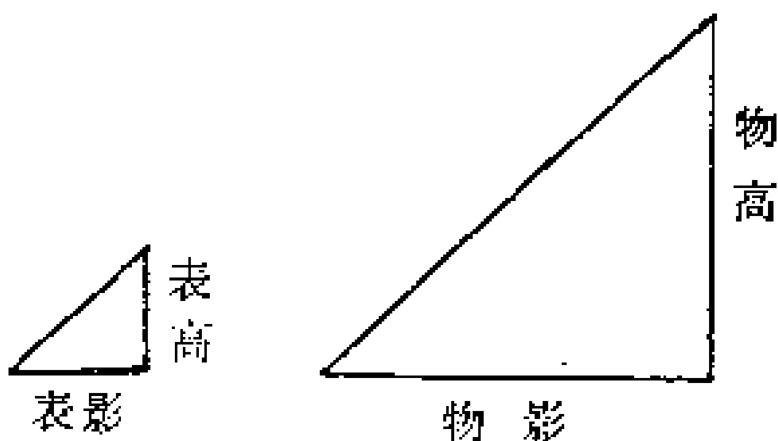
或写成如下的一次同余式：

$$4617 \times 145 \times p \equiv r \pmod{1728}$$

其中 q 为木星运行的周数，$135 \leqslant r \leqslant 139$。在同余式中 q 已不起什么作用，因此只要确定 r, p 即可求出。事实上，仅当 $r = 135$ 时，同余式有整数解，且最小正整数解 $p = 31$，于是 $N = 4617 \times p = 4617 \times 31 = 143127$，这正好是《三统历》的上元积年。①

《三统历》的作者②到底怎样求得 p，从而确定上元积年的？没有明确记载，但一次不定方程或一次同余式问题的出现则无疑问。

6．测绘术。西汉时期结合天文学的研究，测绘术有了新的进展。《淮南子》中有用表（标杆）测量方向和距离的问题，为后来重差术的嵩矢。特别重要的是该书提出一条相似形应用于测量的定理“若使景与表相等，则高与远等也”。就是要测量一个不可能到达的物体高度可以立一个标杆。当着标杆的长度和影长相等时去测量物体的影长，因而可求出要求的高度（图 1



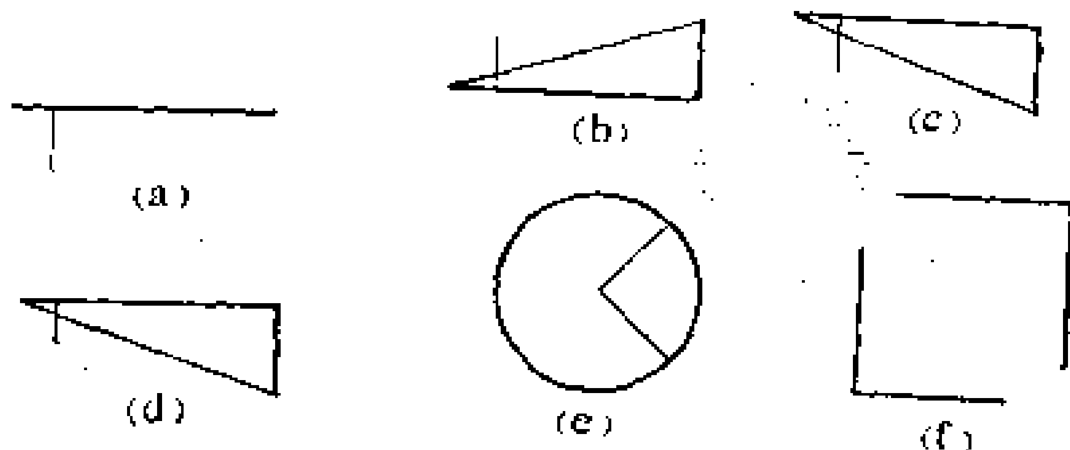
1—48　比例相似的应用

① 参见李文林、袁向东：《论汉历上元积年的计算》，载《科技史文集》第3辑“综合辑”，1980年，上海科技出版社，第70—76页。

② 《三统历》是王莽时刘歆在《太初历》的基础上改编而成的。

—48）。这显然是相似三角形对应边成比例的定理的特例。

《周髀算经》中有关测绘的内容很多。例如用竹筒测量，实际上也是以相似原理为依据的，还有拉绳测定方向等等。《周髀算经》上有一段话："平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。环矩以为圆，合矩以为方。"这是长期



1—49 "用矩之道"图

测量工作的经验总结。前四句的原理基本上一样，都是用相似直角三角形原理。头一句是说用矩的一个边去测量一线是否为直线（图1—49(a)）；第二句是指把矩的一边垂直放置去测量高度(图1—49(b))；第三句是指把矩的一个直角边垂直向下，测量深度（图1—49(c)）；第四句是指把矩平放，测量两点间的距离（图1—49(d))。后三句话的统一原理是：设 a 为矩的一边之长，b 是矩的另一边由顶点到视线的刻度，c 是如图上所示之可测距离，x 为所求，则由 $\frac{b}{a}=\frac{x}{c}$ 有

$$x=\frac{bc}{a}$$

第五句是指矩的顶点不动，而两边在平面上旋转，其端点就画出一个圆（图1—49(e)）。第六句是把两个矩合起来构成一个正方形（图1—49 (f)）。这类问题是由天文历法引起的，而实际上已应用于其它方面，只要满足条件就可以应用。《周髀算

经》上所说的是一般法则，其应用不限于天文方面。

秦汉时期绘图已应用于科学技术。早在秦灭六国的战争中就注意绘制建筑图，“秦每破诸侯，写放其宫室建之咸阳北阪上”①，就是把六国的一些建筑画下图来，在秦的首都咸阳北面的坡地上照样重建。汉武帝时，想在奉高（在今山东泰安县东）建一座明堂，有人献上一幅图，后来照图样施工②。由此可见，当时已经广泛地使用了建筑图。

天文图的绘制，当时也很流行，《周髀算经》中讲到的“日高图”、“七衡图”等等都具有天文图的性质。关于地图的绘制，早在西汉初年就已达到一定的水平，如长沙马王堆西汉墓出土的地图，画得比较准确。

这些科学技术图有一个共同特点，就是原物都很大，当时常把图形画在墙上或丝织物上。因此必须将原物按一定的比例缩小才行。这就必然要提出比例尺的概念，在《周髀算经》中已有了这方面的明确记载。绘制《七衡图》时就用到比例：“凡为此图，以丈为尺，以尺为寸，以寸为分。分为一千里，凡用缯③方八尺一寸；今用缯方四尺五分，分为二千里。”这句话很重要，特别是后半部分，讲了两种比例：一种是“分为一千里”，就是一千里的距离在画图时要用一分长来表示，即1:180000000；一种是“分为二千里”，1:360000000。按第一种比例画《七衡图》用缯8.1平方尺；按第二种比例，由于比例增大，用缯就缩小为4.05平方尺。比例的应用，说明当时对于相似的认识已很清楚。

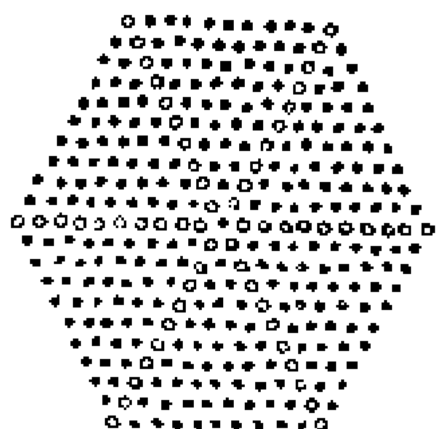
① 《史记·秦本纪》。
② 《汉书·郊祀志》。
③ 缯音增zeng，古时丝织品的总称。

早期的算具——算筹

1. **筹算制度**。古代既然能够计算，必然需要某种方法和工具。我国古代人民在长期实践中创造了独特的计算工具——算筹。算筹一般是用一些小竹棍（也可以用其它东西）做的，又叫筹或叫算子或策。在案上摆成数字，进行计算，叫筹算。筹在古代并不限于数字计算，比如投壶和六博游戏所用的竹棍，都叫筹。

算筹是长期演变而成的，至迟在西汉时已普遍使用。起初大概没有专门的算筹，而是随便用小树棍进行计算，因此在《方言》中有“木细枝为策”的说法。后来才演变为固定的工具。东汉许慎在《说文》中说：“算，长六寸①，计历数者。”当时关于算筹的规格已有明确记载。

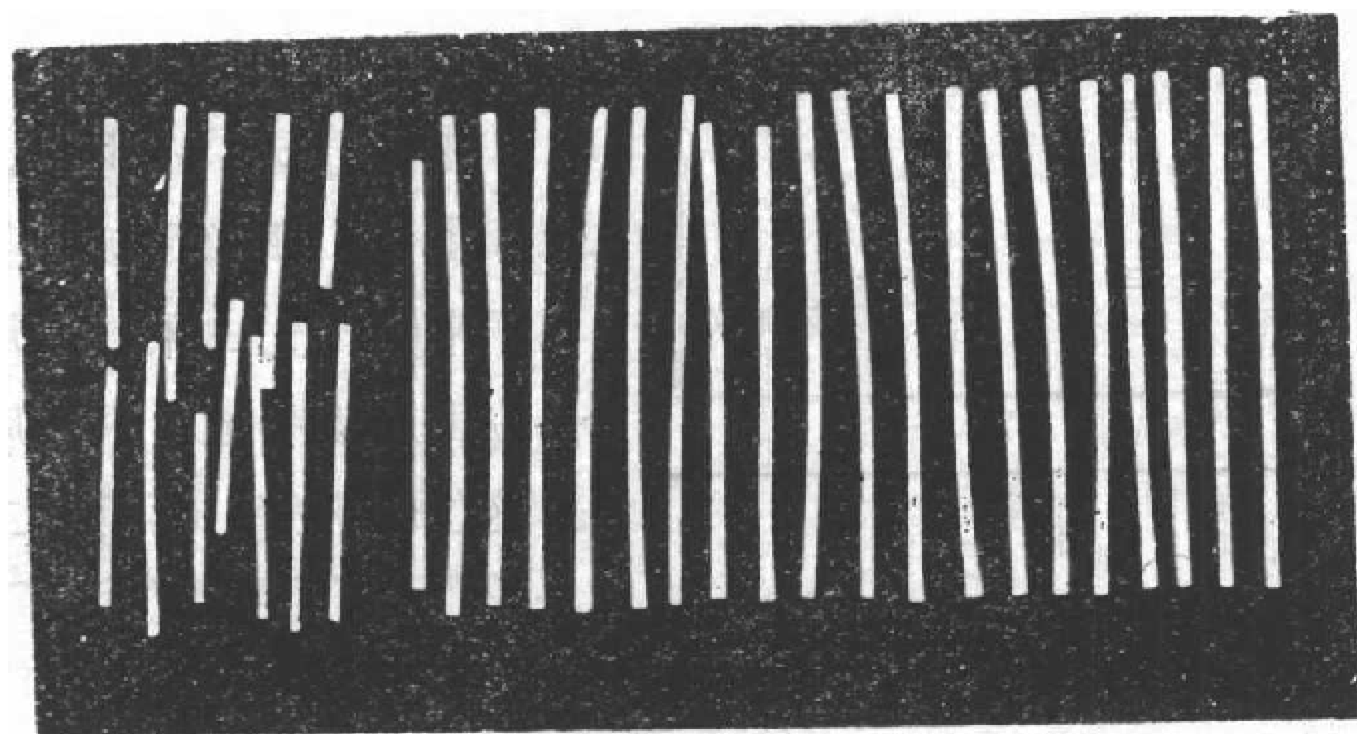
西汉时的算筹是这样的：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚，而成六觚为一握。”②这里关于算筹的粗细、长短、个数都说到了。271根正好合成一个正六角形束，用一手可以握住，样子如图1—50③。



1—50 算筹“六觚为一握”图

1971年8月，在陕西千阳县的一座西汉墓中出土了一批算筹，均为兽骨制成，圆形（图1—51），装在死者腰部的一个丝囊里，说明早在西汉时代就有了盛装算筹的专门“算袋”，后

① 秦汉时的一寸相当于现在的八分多点。
② 《汉书·律历志》。
③ 李俨：《中算史论丛》，第四集，1955，科学出版社，第4页。



1—51　千阳骨算筹

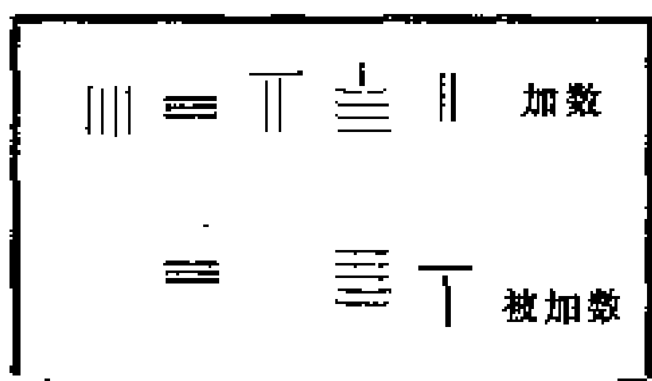
来一直沿用。其中完整者最长的为13.80厘米，最短的为12.60厘米，大多数为13.50厘米①，与文献记载基本上一致。

2．筹算算法。怎样用算筹进行计算，汉代文献上没有记载。根据后来的记载，知道有纵横两种筹式：

纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

算筹的摆法是纵横相间，总是个位为纵，十位为横，摆列时，次序是由右到左，如6451，筹式是𝍮𝍣𝍭𝍠。余类推。筹算加减法很简单，摆上两行，按加或减变成一行，就得结果。如43792＋3056＝46848，如下页（A）图。如遇零，便空一位。减法与此类似。关于筹算乘除法，步骤稍复杂一些，下面各举一例

① 宝鸡市博物馆等：《千阳县西汉墓出土算筹》，载《考古》，1976年第6期，第85—88、108页。

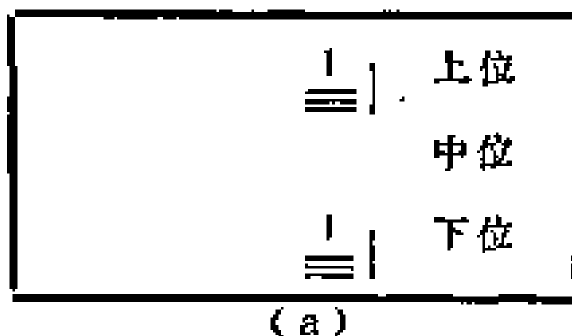




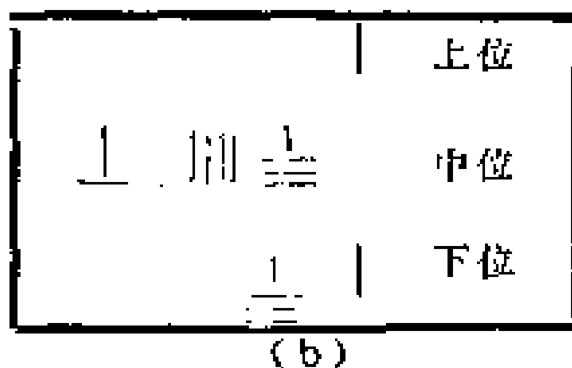
(A)

说明。

乘法分三层：上位、中位和下位，相当于被乘数、积和乘数，先由乘数的最大一位去乘被乘数，乘完后去掉这位的算筹，再用第二位数去乘。两次之积对应位上的数相加，乘完为止。如81×81，先摆成右边图(a)的样子，用80去乘81得6480，“8”用完了，将其去掉，得图(b)，再用1去乘81得81加到6480上，和为6561，“1”也用完了，去掉，于是有图(c)。计算层次很清楚，就是把多位数乘多位数变为用单位数去乘多位数，乘一位加一位。基本思想和现在的笔算乘法完全一样，所不同的一用笔一用筹，再有就是使用乘数的次序两者相反。



(a)

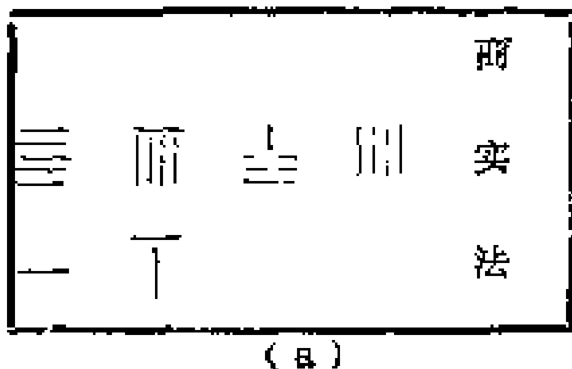


(b)



(c)

除法也分三层：上位是商，中位是被除数（叫做实），下位是除数（叫做法）。除数摆到被除数够除的那一位之下，除完向右移动。例如5984÷16，因5不够16除，所



(a)

以16应摆在59之下，6与9对齐，如图（a）。用16去除59得商3，余1184，将16向右移一位如图（b）。再用16去除118得商7（十位），余64。将16向右移至个位，如图（c）。最后用16去除64，得4，恰尽，商数为374，如图（d），如果除不尽，就摆在那里，呈带分数形式。

商
实
法
（b）

商
实
法
（c）

商
（d）

剩下的还有开方算法，将在下一节结合文献记载加以介绍。

第四节 《九章算术》

——初等数学体系的形成

我国的数学，经过长期积累，到西汉时期，已经有了很丰富的内容。早期的数学知识大都是比较孤立的，没有建立起内部联系。虽然墨家学派曾尝试用逻辑方法研究数学概念，但是没有形成体系。大约经过了四百年左右，到西汉末期，出现了专门的数学著作，特别是《九章算术》的完成，标志着我国的初等数学已形成了体系。

《九章算术》的编纂

1．《九章算术》的成书。《九章算术》是我国流传至今

最早的一本数学著作。它的完成经过一段历史过程。西汉末年曾经有过《许商算术》和《杜忠算术》等书，但都没流传下来。

许商（一作许商），字长伯，长安人。公元前32年到前8年他曾在西汉政府担任将作大匠、大司农和河堤都尉等官职。许商参加过治水工作，精通天文历法，“善为算”，著《许商算术》二十六卷，以及与天文历法有关的著作《五行论历》①。

杜忠与许商同时代，著《杜忠算术》十六卷。②

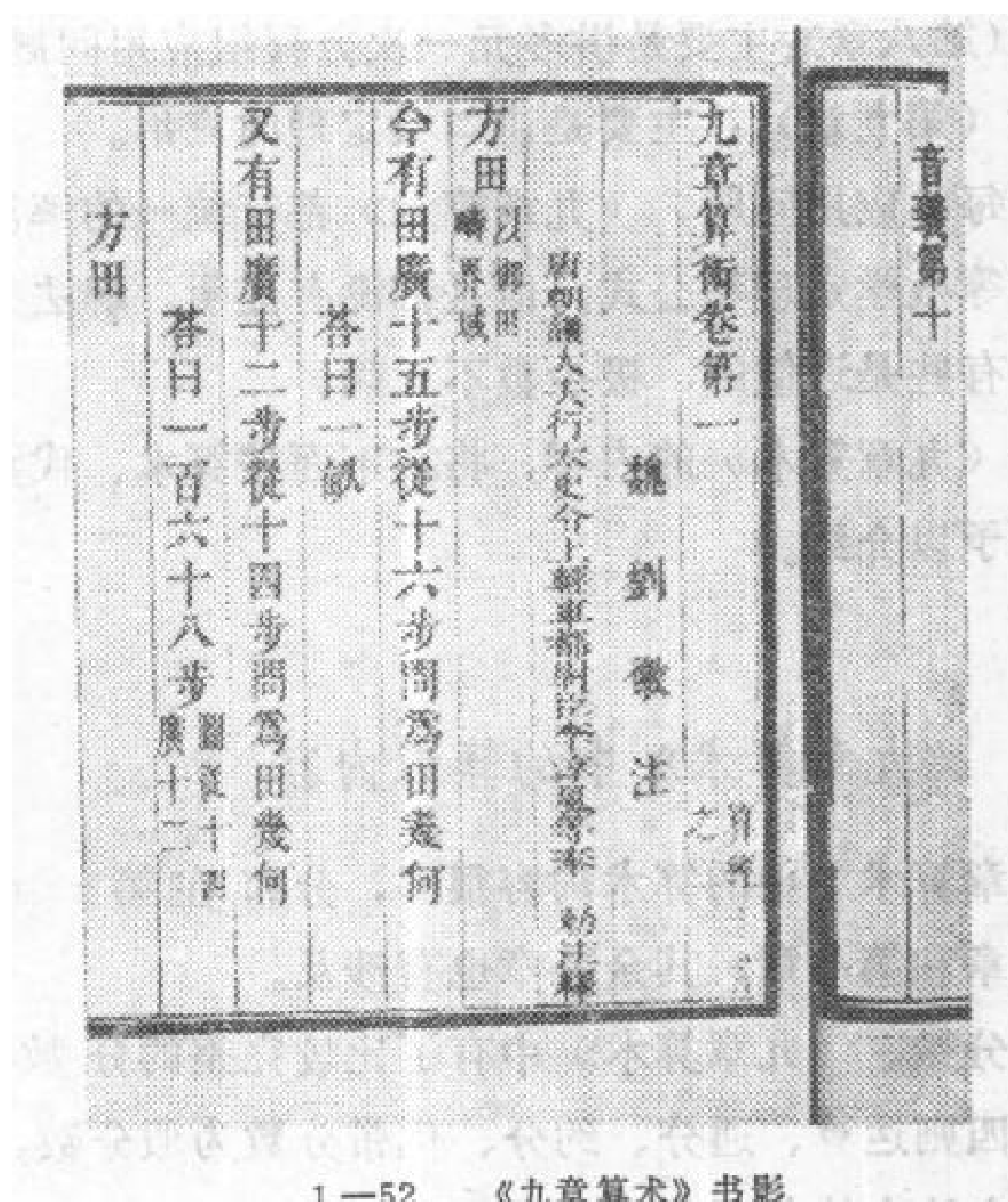
现传本《九章算术》成书于什么时候，目前众说纷纭，多数认为在西汉末期到东汉初期之间，也有认为早到西汉中期的。③实际上，《九章算术》不会成于王莽执政之前，这是因为：第一，西汉末河平三年（公元前26年），陈农曾派人在全国访求遗书，尹咸校对数术之书，只有《许商算术》和《杜忠算术》，而没有《九章算术》。第二，和陈农等同时代的刘向、刘歆父子也在这时领校秘书。刘向作有目录书《七略》，其中也没有《九章算术》。这说明当时还没有以“九章”命名的数学著作。它有可能是刘歆在其父完成《七略》之后，在《许商算术》和《杜忠算术》的基础上重加整理而成，即应在王莽执政期间才有了以《九章算术》为名的数学著作。《许商算术》和《杜忠算术》在东汉时再无人提起，同时很快失传，

①② 《汉书·艺文志》等。

③ 钱宝琮等主张成书于东汉初年，即公元50到100年之间，见钱主编的《中国数学史》第32—33页。李俨和杜石然认为至迟在公元后一世纪《九章算术》已经写定为和现传本大致相同的样子，见李俨、杜石然合著《中国古代数学简史》上册，第49页。笔者认为成书于王莽时代，见《数学通报》1956年第7期。李继闵主张成书于公元前一世纪的前半期，见《数学学报》第18卷第4期（1975）。陈直主张成书于西汉中期，见《西北大学学报》（自然科学版），1957年第1期。

和《九章算术》的出现可能有关。《九章算术》在很大程度上起了代替这两部书的作用。

2．《九章算术》的体例。《九章算术》内容丰富，全书共有246道应用问题，大体按数学性质分为九个大类，组成九



九章算術卷第一

魏 劉 徽 注

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問為田幾何

答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問為田幾何

答曰一百六十八步

方田

1—52 《九章算术》书影

章，每章为一卷。各章的名称和基本内容如下：

方田（第一章）：主要是讲平面形面积的计算和分数算法。

粟米（第二章）：主要是讲各种比例问题。

衰分（第三章）：主要是讲比例配分问题。

少广（第四章）：主要是讲开方问题。

商功（第五章）：主要是讲立体形体积的计算问题。

均输（第六章）：主要是讲根据均输法纳税和输送等方面的计算问题。

盈不足（第七章）：主要是讲算术中盈亏问题的解法和比例问题。

方程(第八章):主要是讲多元一次方程组应用问题的解法。

勾股（第九章）：主要是讲勾股定理的应用。

对于每类应用问题，《九章算术》都有统一的解法，相当于一些初等数学定理和公式。但是都没有证明。解法大部分是正确的，有些是近似的，极少数不正确。

关于《九章算术》的内容，将在下面按算术、代数、几何三个方面予以介绍。

《九章算术》中的算术内容

《九章算术》中的算术内容很多，分布在第一章、第二章、第三章和第七章，其余各章也有涉及。

1．分数。《九章算术》中有了比较完整的分数计算方法，包括四则运算、通分、约分、化带分数为假分数，等等。其步骤和方法大体与现代的步骤一致。

分数加减运算，《九章算术》已明确提出先通分，使两分数的分母相同，然后进行加减。加法的步骤是“母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一”。“实”是分子，“法”是分母。“实如法而一”就是用法去除实。设有分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，其加法步骤为

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

减法的步骤与此完全一样，只是在算术范围内要求须“以少减多”，就是从大数中减去小数。《九章算术》中还注意到两个问题：其一是算出结果后，“不满法者，以法命之”，即分子小于分母时便以分数形式保留。其二是“其母同者，直相从之”，就是分母相同的分数进行加减，运算时不必通分，使分子直接加减即可。

分数乘法是“母相乘为法，子相乘为实，实如法而一”。就是

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

《九章算术》对分数除法虽然没提出一般法则，但算法也很清楚。如“有三人三分之一人，分六钱三分钱之一，四分钱之三，问人得几何”这就是分数除法问题。书上的解法是“以人数为法，钱数为实，实如法而一”，即$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}$。在计算过程中，显然需要首先把带分数化为假分数。

《九章算术》有求最大公约数和化简方法。求最大公约数的方法很有创造性，叫做“更相减损”，求出后进行约分，使分数成为既约的。其具体步骤是：“可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”（方田章）这里开头的一句话是说在分子分母都是偶数的情况下，都能用2除，即“可半者”，便约去2。不能用2除开的两数则另外摆算筹进行计算（这叫“副置”）。把分子和分母从大数减去小数，互相减，减到余数和减数相等为止，这数就是原来两数的最大公约数。用最大约数去除分子和分母，就

得到既约分数。例如，将$\frac{49}{91}$化为既约分数，就要“副置”49和91，“更相减损”求最大公约数。即从91减去49余42，从49减去42余7，再从42连减7五次余7。这个7就是所求，以它约$\frac{49}{91}$得$\frac{7}{13}$。这种求法今天仍可使用。

在分数的加减运算中，已知用最小公倍数作公分母，例如《九章算术》有相当于分数

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\\
&=\frac{420}{420}+\frac{210}{420}+\frac{140}{420}+\frac{105}{420}+\frac{84}{420}+\frac{70}{420}+\frac{60}{420}\\
&=\frac{1089}{420}
\end{aligned}
$$

的运算。这个公分母420正是1、2、3、4、5、6、7的最小公倍数。

2．比例算法。在《九章算术》的第二章、第三章、第六章和第九章中，广泛地使用各种比例解决应用问题。“粟米章”一开头就给出了各种粮食间互换的比例关系：“粟率五十，粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，……”共二十种，然后给出了计算方法：“以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。”用现代的方式表达就是公式：

$$所求数=\frac{所有数\times所求率}{所有率}$$

这是由比例式

$$所求数:所有数=所求率:所有率$$

变换来的。例如书中第一个问题是“今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？”其中“粟米一斗”是“所有数”，把它换成粝米，这粝米数即“所求数”。按规定“粟率五十”为“所有率”，粝米三十为“所求率”。但50与30之比为5:3，故有：

$10\times3\div5=6$（升），即书上所说："以粟求粝米，三之，五而一"。

《九章算术》中有非常复杂的比例问题，例如均输法的问题中有比例分配，项数很多。有的问题包括六个县的赋税输纳。现以"均输章"第一题为例来说明当时比例分配的算法。

"今有均输粟：甲县一万户，行道八日；乙县九千五百户，行道十日；丙县一万二千三百五十户，行道十三日；丁县一万二千二百户，行道二十日，各到所输。凡四县赋，当输二十五万斛，用车一万乘。欲以道里远近，户数多少，衰[①]出之。问粟、车各几何？

答曰：

甲县粟八万三千一百斛，车三千三百二十四乘。

乙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丁县粟四万五百五十斛，车一千六百二十二乘。"

这里的计算方法是每乘车输粟按平均数计算，即$250000\div10000=25$斛。车数和粟数在四县中与户数成正比，与道里远近成反比进行分配。因此计算步骤如下：

$$\frac{1000}{8}=125,\ \frac{950}{10}=95,\ \frac{1235}{13}=95,\ \frac{1220}{20}=61$$

$125+95\div95+61=376$作为分配的共同分母，以总车数"乘未并者，各自为实。实如法而一"所得为各县所出车数，即

$$\frac{10000\times125}{376}=3324.2\cdots,\ \frac{10000\times95}{376}=2526.5\cdots,$$

① 衰音崔cuī，按一定等级递降。

$$\frac{10000\times 95}{376}=2526.5\cdots,\quad \frac{10000\times 61}{376}=1622.4\cdots$$

但是，车数不能是奇零小数，所以《九章算术》采取了“有分者，上下辈之”，即四舍五入的办法，得整数3324、2527、2527和1622，为甲、乙、丙、丁四县各出之车数。各县的车数乘以25斛，就得各该县所出粟的斛数。

上面的计算实际上就是反复运用单比例公式的。《九章算术》中复比例和连比例等方面的问题都有，已包括了现代算术中的全部比例的内容，形成了一个完整的系统。印度于五、六世纪间有“三率法”；欧洲在更晚的时期也有类似的算法。三率法相当于

$$\frac{a\ (\text{所有率})}{b\ (\text{所求率})}=\frac{c\ (\text{所有数})}{d\ (\text{所求数})}$$

的比例式，和《九章算术》的算法一致。但却都在《九章算术》之后。

3．盈亏问题。《九章算术》第七章“盈不足”专讲盈亏问题及其解法，例如“人出八盈三，人出七不足四，求人数、物价各几何”，这就是一个盈亏问题。如果假定每人出钱a_1，盈（或不足）b_1；每人出钱a_2，不足（或盈）b_2，人数为m，物价为n，则有

$$m=\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$$

$$n=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1-a_2}$$

将例中的数字代入，则

$$m=\frac{4+3}{8-7}=\frac{7}{1}=7$$

$$n = \frac{7 \times 3 + 8 \times 4}{8 - 7} = 21 + 32 = 53$$

$m = 7$，$n = 53$为书上的答案。在计算中，“人出钱”数总是正的，$a_1 - a_2$若得负值则调为$a_2 - a_1$。“盈”是正数，“不足”为负数，故上面的计算中$7 \times 3 + 8 \times 4$是由$7 \times 3 - 8 \times (-4)$而来，$4 + 3$由$3 - (-4)$而来。在《九章算术》中把这种计算直接取相当于下面的公式：

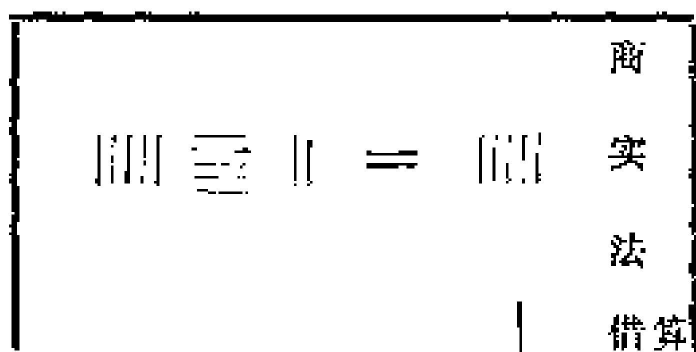
$$m = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

$$n = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 - a_2}$$

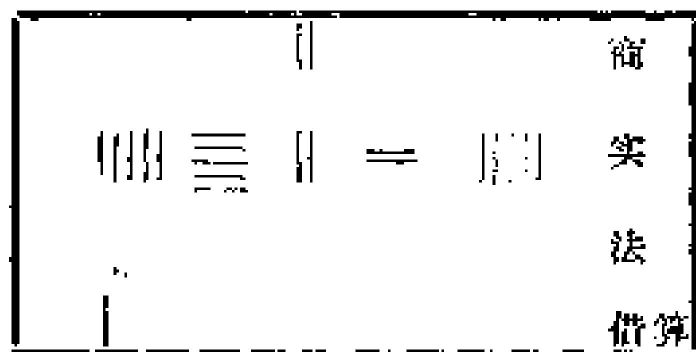
因为在问题中“先出”、“后出”没有次序关系，所以用《九章算术》的公式算出的结果是对的。这是典型的“盈不足”公

用到了开平方，但未讲如何开法。《九章算术》中讲了开平方、开立方的方法，而且计算步骤和现在的基本一样，所不同的是古代用筹算，比较麻烦。现在以$\sqrt{55225}$为例说明古代筹算开方的步骤。

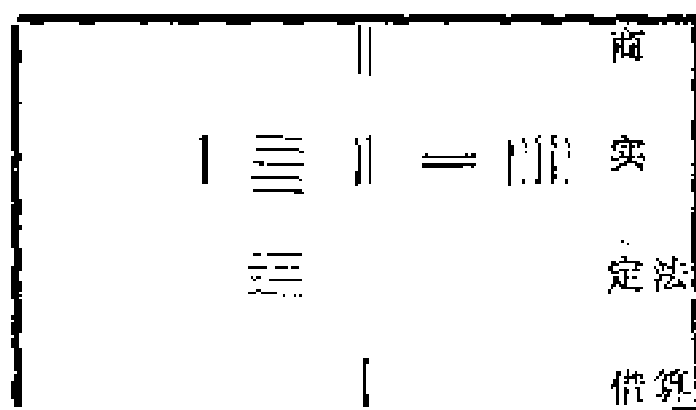
筹算开方分三层，上层为议得的方根叫做“商”；中层为被开方数，叫做“实”；下层为开方过程中去“除”被开方数的那个“除数”，叫做“法”。三层之下，还要摆一根筹，叫做“借算”，起指示位数的作用，同时又代表最高次项的系数。由个位开始向左移，每两位移动一次，有一位议得一数。图(a)为没开方时的原式，“实”是五位数。其商为三位数。第一位由5开得，将借算移至最左的5下，议得商为2如图(b)。这时以商2乘10000得20000，为“法”。再以商2乘“法”得40000，从“实”中减去，得15225，将“借算”移至第三位之下。把“法”加倍，向右移一位，得4000，为“定法”,如图(c)。这时对15225开平方，再议得商为3（十位)。以3乘100得300，加定法得4300。再以3乘



(a)



(b)



(c)



(d)

之，得12900。从“实”中减去它得2325，如图(d)。再以300（即前面的3×100)与4300相加得4600。向右移一位，变为460，是为第三位方根的定法，把“借算”移到个位之下，如图(e)。议得商的第三位（个位）应为5，经计算恰尽，所得根235。这是按筹算布算进行计算的，看起来好象很繁琐，实际上步骤清楚整齐。如以现代形式加以说明，就是：

商
实
定法
借算

(e)

设A为实，a_1为商的最大一位数，前边的计算步骤$55225-2\cdot2\cdot10000=55225-40000=15225$，相当于$55225-200\cdot200=55225-200^2=15225$，即

$$A-a_1\cdot a_1=A-a_1^2 \qquad (1)$$

把“定法”、“借算”分别向右移一位、二位。

设a_2为商的第二位数，计算步骤$55225-2^2\cdot10000-(2\cdot2000+3\cdot100)\cdot3=55225-100(20+3)^2=2325$相当于$55225-(200+30)^2=2325$，即

$$A-a_1^2-(2a_1+a_2)a_2=A-(a_1+a_2)^2 \qquad (2)$$

把“定法”、“借算”分别向右移一位、二位。

设a_3为商的第三位数，则有

$$A-(a_1+a_2)^2-[2(a_1+a_2)+a_3]a_3$$
$$=A-(a_1+a_2+a_3)^2 \qquad (3)$$

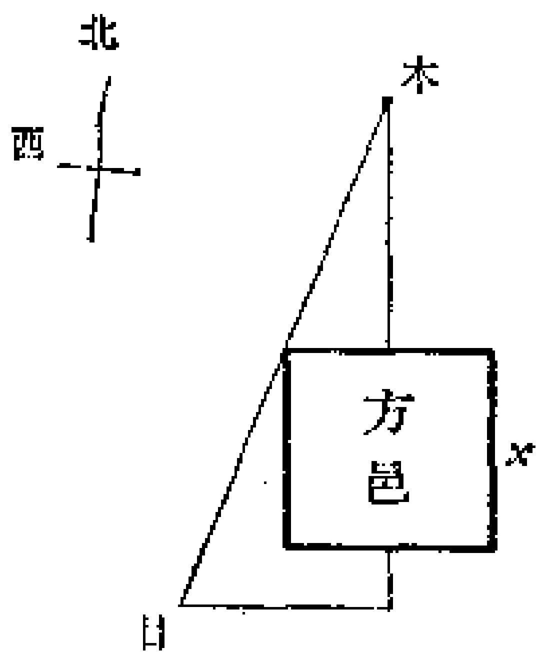
经计算，恰尽，则$a_1+a_2+a_3=200+30+5=235$即为55225之算术平方根。

由(1)、(2)、(3)三式来看，《九章算术》的开平方原理与现代开方原理相同。其中“借算”的右移相当于一次变

换，而向左移也可以理解为代换。《九章算术》中并没有理解到变换和代换，但是这对以后宋元高次方程解法是有影响的。

2．二次方程问题。《九章算术》"勾股"章第20题是相当于解一元二次方程的问题，原题是：

"今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？"



1—53　方邑题补图

所谓"邑方"就是正方形小城的一边之长。命其为x（图1—53），根据题意，再经整理可得方程

$$x^2+34x=71000$$

书中用"带从①开方法"求方程的正根。即"以出北门步数乘西行步数，倍之，为实②。并出南门步数，为从法③。开方除之，即邑方"。这段文字的前半句就是二次方程，而"开方除之"是指解法。解的步骤相当于$x=-17+\sqrt{17^2+71000}=250$（步）。这就是书上的答案。很显然，与下面的求根公式

$$x=\frac{-34+\sqrt{34^2+4\times71000}}{2}$$

吻合。这是我国解一元二次方程的起源。

3．正负数。《九章算术》不仅有了正负数概念，而且还

① 从在这里读作纵zōng，"带从"就是包含长或宽或高为未知数的问题，本题为正方形，因此长为未知数。
② 常数项。
③ 一次项系数。

建立了正负数加减计算法则。"方程"章第二题由于解题的需要，首先讲了这个重要问题：

"正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。"

这里所说的"同名"、"异名"分别相当于现在所说的同号、异号。"相益"、"相除"是指二数绝对值相加、相减。"无"具有零的意思。上引术文的前四句说的是正负数减法法则，设$a>b>0$，可表达为下式：

同名相除：$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$

异名相益：$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$

正无入负之：$0-(+a)=-a$

负无入正之：$0-(-a)=+a$

后四句说的是正负数加法法则，也可表示成下面的形式：

异名相除：$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$

同名相益：$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$

正无入正之：$0+(+a)=+a$

负无入负之：$0+(-a)=-a$

正负数乘除法则，在《九章算术》中还没有，到十三世纪以后才出现。

在外国首先承认负数的是七世纪印度数学家婆罗门笈多(Brahmagupta，约公元598—？)，他也是把负数当做亏欠的数量。欧洲到十六世纪才普遍承认负数。

4．多元一次方程组及其解法。《九章算术》"方程"一章主要是讲多元一次方程组及其解法。这里的"方程"和现在的方程式完全不同，不是指的那种含有未知数的式子，而是由一些数字排列成的长方形阵。《九章算术》中的多元一次方程组

解法，是将它们的系数和常数项用算筹摆成“方程”。消元的过程则相当于高等代数中的线性变换。下面举“方程”章第一题为例加以说明：

“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”其中“禾”是庄稼，“秉”是捆，“实”是粮食，这是一个三元一次方程问题。根据书上的文字，可左、中、右摆成三列。如按矩阵排列，则把左、右改为下、上，用阿拉伯数码代替筹式即可。但中国古代的“方程”与现代矩阵决不相同。为了节省篇幅，我们用现代形式介绍其解法。

左　中　右

上禾　中禾　下禾　实

设 x、y、z 分别为上等、中等、下等庄稼每捆打粮食的斗数，则有方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 2x+3y+z=34 & (2) \\ x+2y+3z=26 & (3) \end{cases}$$

按《九章算术》的解法，“以右行上禾遍乘中行，而以直除”，就是用（1）式 x 的系数3去乘（2）的各项，得

$$6x+9y+3z=102 \qquad (4)$$

由（4）累减（1）二次，有

$$5y+z=24 \qquad (5)$$

再用 $3\times(3)$，得

$$3x+6y+9z=78 \qquad (6)$$

由(4)减(1)一次，有

$$4y+8z=39 \qquad (7)$$

把同样办法用于(5)和(7)，消去y，有$z=2\frac{3}{4}$（斗）。然后依次求得$y=4\frac{1}{4}$（斗），$x=9\frac{1}{4}$（斗）。这就是书上的答案。

《九章算术》中的解法相当于现在的加减消元法，不过比较繁琐。它不是把对应项系数互乘，而只是"一面"乘，然后累减，书上叫做"直除"。由此可见其解法的原始性和初创性。外国对方程组的研究在十七世纪，和"直除法"类似的方法则为十八世纪法国数学家别朱（E.Bezout，1730或1739—1783）所建立。

在《九章算术》中，还有一道"五家共井"问题，是说五户人家共同使用一口井，各家都有提水用的绳子，但都不够长，甲户的两条（同长，下同）和乙户的一条合起来够用；乙户的三条和丙户的一条合起来够用；丙户四条与丁户的一条合起来够用；丁户的五条与戊户的一条合起来够用，戊户的六条与甲户的一条合起来也够用，问井深和各户"一绳之长"。

假定甲、乙、丙、丁、戊各户的每条绳长分别为x、y、z、u、v，井深为a，则有

$$\begin{cases}2x+y=a\\3y+z=a\\4z+u=a\\5u+v=a\\6v+x=a\end{cases}$$

这里五个方程有六个未知数，是不定方程组。书中给出一组解：$a=721$寸，$x=265$寸，$y=191$寸，$z=148$寸，$u=129$寸，

$u=76$寸。这是世界上最早的不定方程组。

《九章算术》中的几何内容

《九章算术》总结了大量的几何知识，分布在"方田"、"商功"、"勾股"等各章中。以下分三个方面进行介绍：

1．面积计算。《九章算术》"方田"章集中讲了面积的计算问题。以现代数学符号给出书中相应的面积计算公式。（以下用 S 代表面积）

（1）正方形（方田）：

$$S=a\times a$$

（2）长方形（直田）：

$$S=a\times b$$

（3）三角形（圭田）：

$$S=\frac{1}{2}ah$$

（4）梯形（邪田，箕田）：

$$S=\frac{1}{2}h(a+b)$$

（5）圆（圆田）：书中用四种形式计算圆面积。令 d 为直径，l 为周长，则有

$$S=\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}d,\qquad S=\frac{1}{4}ld,$$

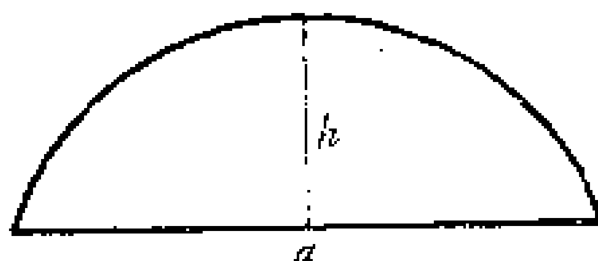
$$S=\frac{3}{4}d^2,\qquad S=\frac{1}{12}l^2。$$

当时圆周率值用"3"，因此这几个公式都能化为 $S=\pi r^2$ $\left(r=\frac{1}{2}d\right)$。

（6）弓形（弧田）：

$$S=\frac{ah+h^2}{2}$$

这个公式是近似的（图1—54）。



1—54 "弧田"图

根据这些公式，可知当时关于常见的平面形面积的计算法则都已有了，其它形状的平面形面积的计算大都可以转化为这些公式中的某一种。

2、体积计算。立体的形状较多，而且复杂。所以《九章算术》中体积计算问题比面积计算问题多，可以说包括了所有的简单立体图形。下面以V表示体积，h表示高。

（1）立方体：

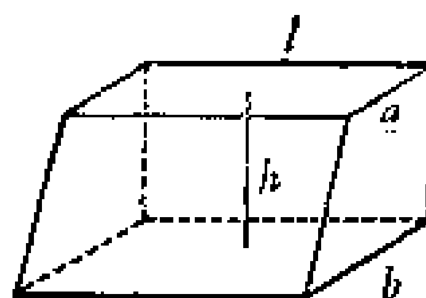
$$V=a\times a\times a$$

（2）长方体：

$$V=a\times b\times c$$

（3）楔形平截体（图1—55）：

$$V=\frac{a+b}{2}\times l\times h$$



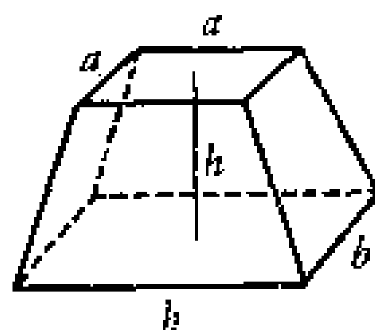
1—55 楔形平截体

（4）圆柱：

$$V=\frac{1}{12}l^2h$$

其中l为底之周长，取π为3，则公式可化为$V=\pi r^2h$。

（5）正方台（图1—56）：

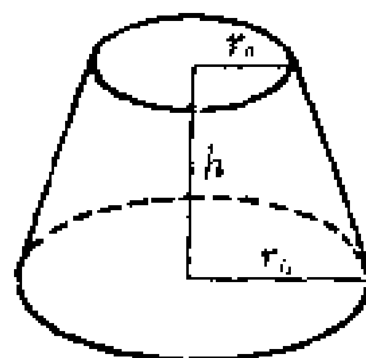


1—56 正方台

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$$

（6）圆台（图1—57）：

$$V=(l_1^2+l_2^2+l_1l_2)\frac{h}{36}$$



1—57 圆台

其中 l_1，l_2 为上下底周长，因此也可化为

$$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$$

（7）四角锥：

$$V=\frac{h}{3}A\ （A：底面积）$$

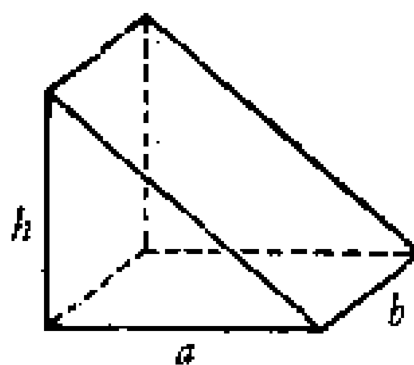
（8）圆锥：

$$V=l^2\times\frac{h}{36}$$

l 为底之周长，也可化为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

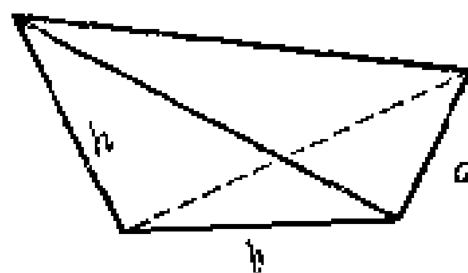
（9）长方体的斜截体（堑堵）（图1—58）：



1—58 "堑堵"

$$V=ab\times\frac{h}{2}$$

（10）底为直角三角形，一棱垂直于一锐角顶点的三棱锥（鳖臑①）（图1—59）：



1—59 "鳖臑"

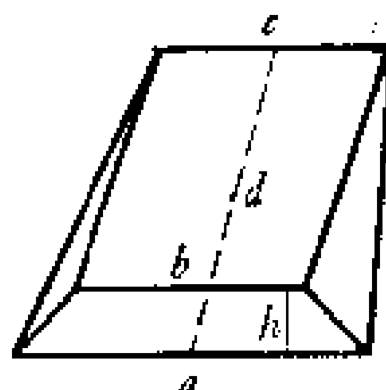
$$V=\frac{h}{6}\times a\times b$$

---

① 鳖臑音 biē nào，臑是牲口的前蹄，这里是用鳖前蹄的形状形容一种立体的形状。

（11）楔形体（羡除）（图1—60）：

$$V=\frac{h}{6}\times d\times(a+b+c)$$



1—60 "羡除"（楔）

它的一端为梯形，是个近似公式。

《九章算术》中没有直接给出球的体积计算法则。但在"少广"章有一"开立圆"问题。即已知球的体积V，反求其直径d，有相当于下面的公式：

$$d=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$$

由此求V，则有

$$V=\frac{9}{16}d^3$$

令$d=2r$，$\pi\approx3$（《九章算术》中所用之值），则可化为

$$V=\frac{3}{2}\pi r^3$$

这个公式与准确的公式比较大$\frac{1}{6}$，因此误差很大。

3．勾股定理及其应用。《九章算术》以前虽然已经有了勾股定理，但主要是在天文方面的应用。《九章算术》用得很广，而且该书先讲了勾股定理及其变形，然后才讲应用，这已注意到了逻辑性。定理及其变形的叙述如下：

"勾股各自乘，并而开方除之，即弦。"

"又股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。"

"又勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。"

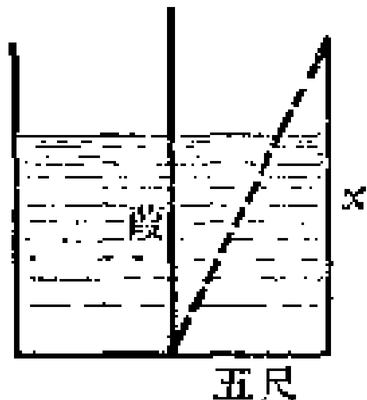
这三句话相当于下面的三个公式：

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad a=\sqrt{c^2-b^2},\quad b=\sqrt{c^2-a^2}。$$

就是说，已知a、b、c中的任意两个都可以求出剩下的一个。

《九章算术》在讲了上述勾股定理之后，解决了二十个应用问题，下面举两个例子。

例 1：“今有池方一丈，葭①生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适于岸齐。问水深、葭长各几何？”

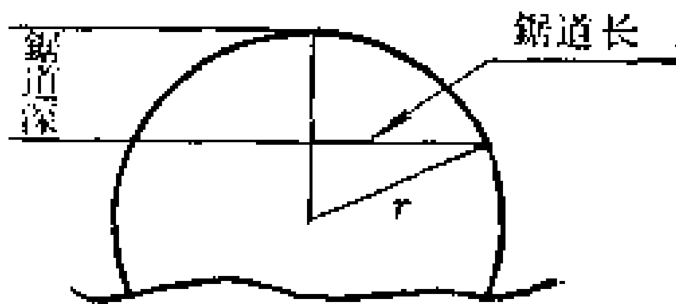


1—61 “葭生池中”

设 x 为水深，则葭长 $=x+1$，由图 1—61知用勾股定理可得 $5^2+x^2=(x+1)^2=x^2+2x+1^2$。经整理有 $5^2-1^2=2x$，于是 $x=\frac{5^2-1^2}{2}=12$（尺）。葭长 $=x+1=12+1=13$（尺）。书上解法说“半池方自乘，以出水一尺自乘，减之。余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长”。和现代解法的最后步骤相同。印度古代有著名的“莲花问题”，只有数据与《九章算术》“葭生中央问题”不同，其余完全相同，但却晚了一千多年。

例 2：“今有圆材②，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？”这是有名的“锯圆材问题”。

设 r 为圆材的半径（图 1—62），由勾股定理有 $r^2=5^2+(r-1)^2=5^2+r^2-2r+1$，得 $2r=26$（寸），即圆材直径。



1—62　锯圆材问题补图

《九章算术》早已流传到许多国家，现在已有日、英、俄、德等各种文字的译本。

---

① 葭音加jiā，一种芦苇类植物。

② 圆材就是圆柱形的木材。

把《九章算术》和西方最早的一本数学著作《几何原本》比较一下就会发现，它们各有特点：《几何原本》以形式逻辑方法把全书内容贯穿起来，而《九章算术》则以问题的性质分类编排；《几何原本》以几何为主，略有一点算术内容，而《九章算术》则包含了算术、代数、几何等我国当时数学的全部内容；《几何原本》中没有谈到应用问题，而《九章算术》则以解应用问题为主。这两部数学书的不同特点在东、西方有深刻的影响，形成东、西方数学的不同风格。

第 二 章

东汉初期到元代中期

（公元一世纪初到十四世纪初）

从《九章算术》问世以来，我国的数学便进入了“九章”时代。直到十四世纪初的一千三百年中，《九章算术》始终是传播数学知识的主要课本，同时许多数学著作以“九章”的方式（即按问题的解法分类）编排，且书名也常冠以“九章”之类的字样。我国的数学在此时期有了极大的发展，形成了高峰。

第一节 赵君卿、刘徽等人的数学成就

《九章算术》和其它事物一样，不可避免会存在一些问题，例如书中只有解题方法，而没有理论证明；还有些结果比较粗疏，等等。这些问题，在后来的应用中逐渐暴露出来，这也推动了理论研究。本节将以数学家刘徽为中心论述东汉到三国末的数学研究和成就。

对《九章算术》的检验与赵君卿的《周髀算经》注

1．早期对《九章算术》的检验。东汉时期我国的经济、文化又有了进一步的发展。当时疏浚和兴修了许多水利工程，出现了不少新的铁制农具，并且中原的许多先进生产技术推广到南方或边远地区，农业生产达到了较高的水平。东汉初年，发明水力鼓风炉——水排，煤和石油已被利用，出现了真正的瓷器，纺织技术等都有重要发明，手工业有很大进步。经济的发展给科学的进步提供了物质基础，天文学、地震学、医药学等等都取得了重要成就。

在这种情况下，东汉统治者对于度量衡的管理有所加强，度量衡器具和计算要有统一标准，《九章算术》就被列为核校度量衡的数学依据。在东汉光和二年（公元179年）一块铜版上的铭文中规定："大司农以戊寅（公元138年?）诏书，以秋分之日，同度量、均衡石、桷①斗桶、正权概，特更为诸州作铜斗、斛、称，依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，以齐七政，令海内都同。光和二年闰月廿三日。大司农曹棱亚、淳于宫，右仓曹椽朱音、史韩鸿造。"②就是说，凡是度量衡研制中涉及到的数学问题都要依据《九章算术》的算法进行计算，实际上等于把《九章算术》宣布为官书，它当时在社会上的影响就可想而知了。

---

① 桷音决 jué，方形的椽子。

② 《筠清馆金石记》卷五。

东汉、三国时期已经有许多人学习和研究《九章算术》，它在当时几乎是唯一的数学著作。据历史记载，当时著名学者马续“善《九章算术》”，郑玄兼通《九章算术》，徐岳“素习《九章》”，三国时陈炽等都是《九章算术》的研究者。因此当时精通《九章算术》的人是不少的。

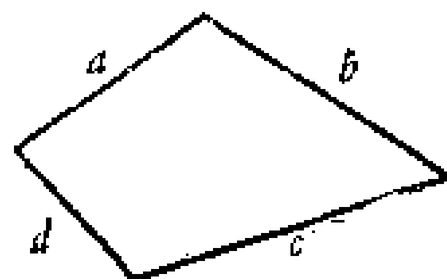
许多人运用《九章算术》中的数学知识去解决实际问题。他们首先是把正负数加减运算法则应用于天文历法。东汉元和二年（公元85年），由政府主编的《四分历》中，计算太阳的视位置度数就用到了正负数。法则是：“强正弱负也。其强弱相减，同名相去；异名从之。从强进少为弱，从弱退少为强。”①这里所讲的是正负分数的减法运算，“同名相去；异名从之”相当于《九章算术》的“同名相除；异名相益”。“弱”为负数，“强”为正数。用式子表示就是：设 $a>b>0$，则 $b-a$ 为负数，就是“从强进少为弱”；设 $a<b<0$，则 $b-a$ 为正数，就是“从弱退少为强”。

几十年后，著名天文学家刘洪在实测基础上制《乾象历》，其中用到正负分数的加减法。他的叙述是：“强正弱负：强弱相并，同名相从，异名相消；其相减也，同名相减，异名相从。无对互之。”②其中“无对”和《九章算术》中的“无入”是一个意思。

在社会实践中，对《九章算术》中没有提到的问题也有了补充。比如在《九章算术》中没有任意凸四边形的面积算法。

① 《续汉书·律历志》。
② 《晋书·律历志》。

但是在东汉建初六年（公元81年）的一份“买地玉券”上有这样的记载：“田南广九十四步，西长六十八步，北广六十五（步），东长七十九步，为田廿三亩奇百六十四步。”①但没有讲到算法，后来《夏侯阳算经》中有“四不等田”面积算法是“并二长半之，又并二广半之，相乘为积步”。



2—1 “四不等田”

（图2—1）就是

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}$$

如果把“西长六十八步”校为“西长六十四步”，用上面的计算为

$$\frac{94+65}{2}\times\frac{64+79}{2}=5684.25\text{（步）}$$

当时一亩等于二百四十（平方）步，因而

$$\frac{5684.25}{240}=23\frac{164.25}{240}$$

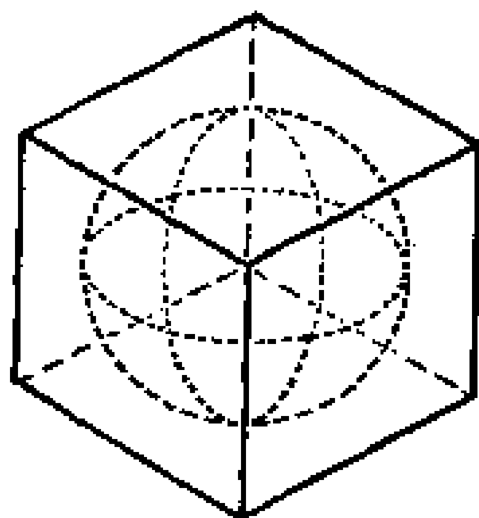
与记载几乎完全一致。以此推之，可知在东汉早期已经建立了凸四边形面积的近似公式。这个公式，对于越接近矩形的凸四边形精确性越高。

《九章算术》中的球体体积公式，大科学家张衡（公元78—139年）已经发现它不精确，并且进行了研究。他设想把球装到一个立方体内并使它们正好相切（图2—2）。他经过推算，得出立方体体积与球的体积之比等于8:5这个结论。这比原来的误差更大，因此没有得到更好的公式。但是他的研究方

① 罗振玉：《楚雨楼丛书》第八种《蒿里遗珍》。

法，却给后人以有益的启发。

张衡在天文学研究中还用到了其它数学知识，比如“重差钩股”，“勾股”是勾股定理，而“重差”则是相似比例在测量上的应用，后来才有明确的解释。他在计算周天和地广时得到圆周与直径之比为92:29，这就是圆周率的近似值。此外，他还得到相当于$\pi=\sqrt{10}$的结果。



2—2　立方体及其内切球

东汉末年著名学者蔡邕（公元133—192年）认为圆周率应大于$\frac{25}{8}$($=3.125$)，三国时王蕃（公元228—266年）则认为“周百四十二，径四十五”，即相当于$\pi\approx\frac{142}{45}$。

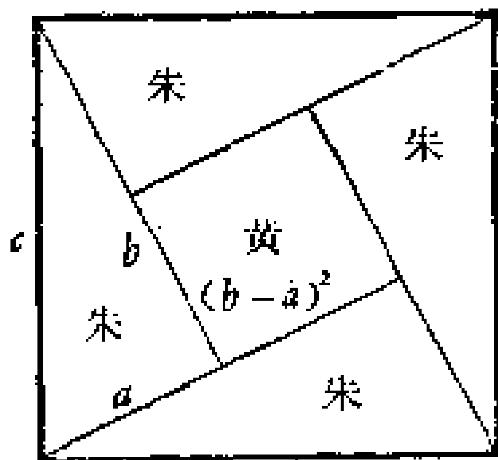
《九章算术》用3作π值，而张衡、蔡邕、王蕃等人得出的结果都是对《九章算术》不精确的圆周率值的改进。

《九章算术》以后，对数学第一个进行理论研究的是赵君卿。

2．赵君卿及《周髀算经》注。赵君卿本名爽，生平不详，可能是东汉末至三国时代人。他研究过张衡的天文数学著作《灵宪》和刘洪的《乾象历》，也提到过“算术”（大概是指的《九章算术》），尤其是他深入研究了《周髀算经》，为此书写了序言，并作了详细注解。

赵君卿承认数学起源于社会实践，接受了前人关于“月不发光”说的正确结论。他认为人与天体的距离虽然很远，不能直接测量，但可以用“昼仪验其短长”，就是用仪器间接地测出。

赵君卿在数学方面的成就，主要是写了《勾股圆方图》。这是我国数学史上极有价值的文献，它作为《周髀算经》的注文而保存在该书的注中。全文只有五百三十余字，但却包含了很重要的内容，特别是在我国第一次明确给出了勾股定理的理论证明。他在叙述了定理的内容之后，又写道："案：弦图（图2--3）又可以勾股相乘为朱实二，倍之，为朱实四，以勾、股之差自相乘为中黄实，加差实亦成弦实。"其中所谓"实"，就是面积。意思是说"弦图"的构成，是把直角三角形的两个直角边相乘得到一矩形的面积（正好是两个直角三角形的面积），涂上红色（朱），再二倍，就变成四个相等的三角形，都涂上红色，象插图那样排列起来。中间是以勾、股之差为边的正方形的面积，涂上黄色。这样正好构成一个以直角三角形的斜边（弦）为边的正方形面积。如以a、b、c分别表示勾、股、弦之长，则有



2—3　"弦图"

$$2ab+(b-a)^2=c^2$$

经整理即得　$a^2+b^2=c^2$

这种证法简单明了，现在仍被采用。在国外，也有类似的证明方法。印度数学家巴斯卡拉（Bhaskara，1114—1185年？）和中亚数学家阿部尔·瓦发①（于十世纪后半期）都曾先后用

① Физико~Математические науки в странах востока, 1966, Издательство «Наука», стр.110—113.

过，但都在赵君卿之后。

赵君卿证法的基本思想就是图形经“移补凑合”，而面积不变。这种方法在我国后来有很多人运用，发展为“演段术”。

勾、股、弦及其和差，在正数范围内仅有九种，即假定 $a<b<c$，则有 $a,b,c,a+b,b-a,c+b,c-b,c+a$，$c-a$。若已知其中任意两种，则可求出其余。这样，勾、股、弦及其和差互求问题一共应有 $\frac{1}{2}\binom{2}{9}=36$ 种，赵君卿已解出24种。后来到了元代，把其余的全都求出。

赵君卿在《勾股圆方图》中还研究了二次方程问题，并得出了与“韦达定理”类似的结果。他说：“其倍弦为广袤合，令勾股见者自乘为其实。”设 x_1、x_2 分别为“广”、“袤”，则“其倍弦为广袤合”，就是 $x_1+x_2=2c$（c 为弦长），“令勾股见者自乘为其实”，就是 $x_1x_2=a^2$（或 b^2）。$x_1+x_2=2c$ 和 $x_1x_2=a^2$（或 b^2）就是二次方程 $x^2-2cx+a^2=0$ 的二次项系数和常数项。其意义与韦达定理一样①。赵君卿的结果比韦达（F. Viéte，公元1540—1603年）早了一千三百多年。

赵君卿还得到了相当于如下的式子

$$x=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2}$$

显然是上述二次方程的一个根。这是世界上最早的求根公式之一。

赵君卿对分数也有研究，把《九章算术》中的分数运算方法上升到理论高度，创始了“齐同术”。他在计算天文问题

---

① 严敦杰：《中学数学课程中的中算史材料》，1957，人民教育出版社，第7页。

时，以齐同术算乘除法。例如他在《周髀算经》注中写道："通周天四分之一为千四百六十一，通十二月十九分月之七为二百三十五，分母不同，则子不齐，当互乘以齐同之。"就是把周天$365\frac{1}{4}$度化为$\frac{1461}{4}$度，把$12\frac{7}{19}$月化为$\frac{235}{19}$月，每月之度数当为$\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}$。但是这两个分数的"分母不同"，因此必须"互乘以齐同之"，即 $1461\times19=27759$，$235\times4=940$，$4\times19=76$。于是

$$365\frac{1}{4}\div12\frac{7}{19}=\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}=\frac{27759}{76}\div\frac{940}{76}$$

$$=27759\div940=29\frac{499}{940}$$

总之，赵君卿在我国数学史上是一位有贡献的数学家，他的不少数学思想和方法对后来的数学界是有影响的。

数学家刘徽的思想

公元三世纪是我国数学理论发展的重要时期。如果说赵君卿在数学理论方面的工作是一种尝试的话，那么数学家刘徽则是进行深入研究的杰出代表。

1．刘徽的批判精神。刘徽生活在三国时代的魏国，可能是山东人。他曾从事度量衡考校工作，研究过天文历法，还可能进行过野外测量。但是他最主要的工作是数学研究，他反复地学习和研究了《九章算术》。他自己曾说："徽幼习《九章（算术）》，长再详览。"刘徽在研习《九章算术》过程中，发现许多问题不能使人满意，于是一一提出解决办法，取得了卓越

的成就。他对《九章算术》进行了详细注解，写了序言，并作《重差》（后人称《海岛算经》）一卷，这是他留给我们十分珍贵的科学遗产。



刘　徽
（蒋兆和画）

刘徽对分数的看法是："物之数量不可悉全，必以分言之"，即分数来源于客观需要。他对正负数也有类似的看法。

刘徽的批判精神十分可贵，他不迷信权威，也不盲目地踩着前人的脚印走，而是有自己的主见。例如张衡虽在科学上有很大贡献，可是他的认识却有一些不正确的地方，刘徽并没有因为张衡在历史上的地位而附会其错误。在讨论张衡关于球体积的研究时指出："（张）衡说之自然，欲协其阴阳奇耦①之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。"

刘徽尖锐地批评了当时数学上的"踵古"思想。在"方田"章的注文中，他指出圆周率"非周三径一之率也。周三者从其六觚②之环耳"。就是说，周三仅是圆内接正六边形之周长，而不是圆周长。可是很多人还泥守着"周三径一"这个陈腐的概念，不敢超越。刘徽说："学者踵古，习其谬失"。这些

① 耦音偶，ǒu，两人在一起耕地叫"耦"，作"双"，"对"解，与"偶"同。
② 觚音孤，gū，古代的酒器，呈八棱或六棱形，又作棱角讲。

“学者”不去认真研究，“莫肯精覈①”，结果是以疏传疏。他在“方程”章中又指出：有些人“拙于精理”，只知按前人的方法，亦步亦趋地去做，不懂得改变解题方法和步骤，有的甚至于达到“或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵”的荒唐地步。刘徽嘲笑这些人对于数学的态度就象“胶柱调瑟”一样，别人拧都拧不动。

2．刘徽的数学思想。刘徽在批判前人错误思想的同时吸收了许多有益的东西，从而形成了自己的一套先进数学思想。在他的《九章算术》注中处处闪烁着先进数学思想的光辉。

刘徽的数学思想，粗略地说可有以下几个方面：

首先，他在数学方面具有朴素的辩证法思想。他主张对于具体问题具体分析，解决数学问题不应拘于一法。例如“均输”章第26题，他认为有两种解法，到底用哪个方法，刘徽认为“可随率宜也”。

其次，刘徽很注意寻求数学内部的一般规律。他在《九章算术》注的序文中说：“事类相推，各有攸归，故条枝虽分而同本榦②者，知发其一端而已。”意思是有许多数学问题，表面上看不相同，但在理论上都是一致的，它们有共同的根源。在整个注解中，都贯穿了这种思想。他在“勾股”章16题注中说：“言虽异矣，及其所以成法，实则同归矣。”

再次，刘徽也很注意转化。这是他的朴素辩证法思想的体现。他用这种思想指导运算中的化简工作，例如对于约分就明确讲述了这一点。刘徽注意到“分之为数，繁则难用”，因此要

① 覈音核，hé，作深刻解，又作考察解，与核通。
② 榦音干，gàn，树木的主体，与枝相对。

约分，而约分的结果数值不变。他说："设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异词，至于为数，亦同归尔。"在"衰分"章中，刘徽还讲了分数的同值变换问题，"一乘一除适足相消，故所分犹存"。

再次，刘徽很注意数学推理的逻辑性。他对《九章算术》中的所有数学概念都作了解释或逻辑定义。他还考虑了各问题之间的逻辑关系，例如他讲"不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥、亭之类，功实之主也"。是一环扣一环的。在"勾股"章中，也明确指出：这一章之所以一开头就提出了勾股定理，是因为"将以施于诸率，故先具此术，以见其源也"。他从逻辑严谨性出发，对于那些能从逻辑上证明的法则都进行了论证。他认为有些问题不能只限于感性认识，必须从理性上加以认识。

刘徽也注意到数学的直观性。他主张"析理以辞，解体用图"。就是理论和直观并用，只有这样，才能更好地使人理解数学内容，达到"庶亦约而能周，通而不黩①，览之者思过半矣"的目的。因此他在数学研究中很注意使用图形、立体模型、剪纸和涂抹颜色。

刘徽也有一些模糊或不正确的认识。例如在数学起源的问题上，刘徽认为"昔在包羲氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术以合六爻之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉"。就是说，在他看来数学是起源于包羲（即伏羲）画八卦的神话传说。又说"按周公制礼而有九数，九数之

① 黩音独，dú，随便的意思。

流，则九章是矣”。这又把《九章算术》推源到所谓“周公制礼”。这些看法都是没有根据的。然而，对刘徽来说，这些缺点无损于他的光辉成就。

下面依次介绍刘徽在算术、代数、几何和重差术方面的成就。

刘徽在算术方面的贡献

1．十进小数。我国在刘徽以前，计算中遇到奇零小数时，或是化为分数，或是用地位制命名法，或者四舍五入。小数位数少，这样处理固然可以，位数多了，就不方便。刘徽在长度的记法中就用到数名：丈、尺、寸、分、厘、毫、秒、忽，“忽”是最小的，它以下没有专名。刘徽在数学研究中就遇到了需求忽以下的小数，他没有继续命名，而是创造了十进小数（用十进分数形式给出）。

刘徽在《九章算术》注中有三个地方用到了十进小数，现分述于下：

①“方田”章圆田术注：“……七十五（平方）寸，开方除之，下至秒忽。又一退法，求其微数。微数无名者以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。”就是把75开平方，开得八寸六分六厘二秒五忽。可是还有剩余，再开就得出忽以下的小数，刘徽把它们叫做“微数”，不再命名。他把所求到的忽以下的第一个数字4做分子，以10做分母，表示为十进分数$\frac{4}{10}$忽。因此说“约作五分忽之二”，即$\frac{4}{10}$忽$=\frac{2}{5}$忽。这就是以忽为单位，忽以下用十进分数处理。

②“少广”章开方术注：“……凡开积为方，……求其微数，微数无名者，以其为分子，其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细。……”设N为被开方数，其平方根的整数部分为a忽，还有剩余为r（平方忽），即

$$\sqrt{N} = a\text{忽}\cdots\cdots\text{余}\ r$$

继续求“微数”，以a_1为第一个数字，就把它作为分子，以10为分母（“其一退以十为母”）。再求一次又得数字a_2，把a_2做分子，以100(10^2)为分母（“其再退以百为母”）。依此继续求到第n次，如已开尽，就得分数 $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$，即开得之小数部分，因而有

$$\sqrt{N} = a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\ (\text{忽})$$

其中a_1、a_2、……a_n都是1、2、……9、0中之某一个。这种记法（刘徽用文字叙述）和现代十进小数本质上完全一样。

③“少广”章开立圆术注：“术亦有以法命分者，不如故幂开方，以微数为母也。”这也是说的十进小数，但不详细。

总之，刘徽在对奇零小数的处理上创用了十进小数记法，这在世界数学史上是一项伟大的成就。外国的同样思想到十四世纪才出现，晚了一千多年。

2．齐同术。赵君卿首先引用了“齐同”这个术语，在应用上还只是零星的，更没有形成完整的理论。这一工作，由刘徽出色地完成了。

①齐同术定义。“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同”，这是对一组分数说的，就是使分母相同，而要对分子所做的相

应变动所下的定义。例如对分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$通分时，《九章算术》用ad和cb做分子，bd做公分母。刘徽的"凡母互乘子谓之齐"就是把ad和cb定义为"齐"；"群母相乘谓之同"就是把bd定义为"同"。这一定义显然适合于多个分数的情形。

刘徽又把他的齐同术定义进一步加以解释，他说："同者，相与通同共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。"意思是说"同"是一群分数的公分母；"齐"是由"同"而来，是为了使每个分数之值不变。例如分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$和$\frac{e}{f}$，按定义以bdf为公分母。若想使每个分数值不变，就必须"子与母齐"。按定义"母互乘子"，得adf、bcf和bde，原来的分数分别变成，$\frac{adf}{bdf}$，$\frac{bcf}{bdf}$和$\frac{bde}{bdf}$，其值都没变。

②"齐"和"同"实际求法。直接根据定义求"齐"、"同"固然可以，但是当分子分母都很大时，计算自然不方便。因此，刘徽提出用诸分数分母的最小公倍数去求"齐"、"同"的方法，即"母除率，率乘子为齐"。"率"就是（诸分母的）最小公倍数。设有分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$和$\frac{e}{f}$，且$m=[b, d, f]$（最小公倍数）。所谓"母除率"就是：$\frac{m}{b}$，$\frac{m}{d}$和$\frac{m}{f}$。"率乘子为齐"，即分别以$a\times\frac{m}{b}$，$c\times\frac{m}{d}$和$e\times\frac{m}{f}$为新分数的分子，以m为公分母，便得分数

$$\frac{a\times\frac{m}{b}}{m},\quad \frac{c\times\frac{m}{d}}{m},\quad \frac{e\times\frac{m}{f}}{m}$$

这就是齐同以后的结果。

③齐同术的推广。刘徽不仅完成了齐同术理论，而且还进行了推广．用以解决其它问题。例如他用齐同术去求几个分数的平均值，解释衰分术，解“均输”、“盈不足”和“方程”等问题。在“衰分”章“返衰”下注称：“母同则子齐，齐即衰也。”设$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$、$\frac{e}{f}$，可通过齐同术判断它们的大小，即通分得公分母bdf，分子分别为adf、bcf和bde，比较分数的大小只比较分子便可。假定$adf>bcf>bde$，则有不等式：

$\frac{adf}{bdf}>\frac{bcf}{bdf}>\frac{bde}{bdf}$，这就是“齐即衰”的意思。齐同术在外国没有提出过，因此可以说是我国古代算术的一个特色。

3．对算术的其它研究。刘徽在算术方面还作了其它一些研究，并有创见。他认为“一乘一除，适足相消，故所分犹存”，就是一个分数用同一个数（非零）同时乘除，其值不变。刘徽说：“法实俱长，意亦等也”，意思是分子（实）、分母（法）都扩大同一倍数，结果和原来的分数一样。

对于《九章算术》中“更相减损”求最大公约数方法，刘徽也有自己的认识。《九章算术》中没有说明这个方法成立的理由，刘徽则指明了这一点，他说：“其所以减之，皆等数之重叠……”就是所以能“减之”，是因为两数中有“重叠”的“等数”（公约数）的缘故。

化带分数为假分数的实际求法在《九章算术》中早已提出，但是没有说明。刘徽第一次对这个问题进行了解释。他在“方田”章注称：“命母入者，须还出之”。“母入者”就是指形如$m\frac{a}{b}$的带分数，“还出之”就是把它化为$\frac{mb+a}{b}$形的

假分数。分数运算只有先做到这一步，然后才能实际加、减、乘、除。他还研究各种比例算法，统名之曰“今有术”。

刘徽在代数方面的贡献

刘徽在代数方面也做过不少研究，有自己的独到见解。

1．对正负数的认识。如前所述，历法中对正负数已有广泛应用，可是究竟应当怎样认识正负数，却很少有人论及。刘徽在《九章算术》注中第一次深刻阐述了自己的看法。

正负是什么意思呢？刘徽说：“今两算得失相反，要令正负以名之。”“算”在这里是指当时所用的算筹，如果计算时用算筹代表“得”、“失”两种量，那就要用正负数来定义。这个观点是正确的。

用筹进行代数运算时如何区别正负数，以前不见记载。刘徽提出两种方法，就是“正算赤，负算黑。否则以邪正为异”。是说用红、黑两种颜色的算筹区别正负；如果不这样，在用同一种颜色的筹计算时可以在摆法上以“正”、“邪”（斜）区别正负数。这两种方法，对后来的数学都有深远影响。

刘徽还认为：“言负者未必负于少，言正者未必正于多”，这是说正负数的绝对值。前一句话是指负数的绝对值未必小；后一句话指正数的绝对值也不一定很大。在计算中，筹的总数不变，即筹的个数不变，因此他接着说：“虽复赤黑异算，无伤。”

2．改进解线性方程组“直除法”。刘徽对方程组有深刻认识，明确提出当时所说的“方程”应当“令每行为率，二物

者再程，三物者三程，皆如物数程之”，即有几个未知数列几个方程。这个问题到近代才清楚。对于方程组解法的研究，他的贡献很大。《九章算术》中用“直除法”解线性方程组，思路正确，但是麻烦一些。改进直除法比较容易。只要将对应项系数互乘、对减一次即可消去一项。可是长期没人注意到这点。刘徽在“方程”章第七题的注中，第一次用到这个方法。原题是：“今有牛五、羊二，直（值）金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？”用现代表示法就是：设 x 、y 分别代表牛、羊每只值金数，则有

$$\begin{cases} 5x+2y=10 & (1) \\ 2x+5y=8 & (2) \end{cases}$$

《九章算术》没有给出解法步骤，只是说“如方程”而已。刘徽在注解中提出互乘对减法。他说：“假令为同齐，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行，牛十、羊四，直金二十两；左行，牛十、羊二十五，直金四十两。”这就是以 $2\times(1)$，$5\times(2)$，得

$$\begin{cases} 10x+4y=20 & (3) \\ 10x+25y=40 & (4) \end{cases}$$

此时“牛数等同，金多二十两者，羊差二十一，使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也”。就是（4）－（3）有

$$21y=20$$

由此可求出每只羊值金数 $y=\frac{20}{21}$。刘徽认为这是显而易见的，没有继续计算。这个解法步骤和现代的加减消元法本质上完全一样。虽然刘徽仅在此处用了一次这个方法，但是他认为可以推广。他说：“以小推大，虽四、五行不异也。”就是说他的

方法适用于四元、五元方程组的情形。

3．建立方程新术。《九章算术》"方程"章最后一题是："今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五。问一斗直几何？"这相当于下面的五元线性方程组。

$$\begin{cases} 9x+7y+3z+2u+5v=140 & (1) \\ 7x+6y+4z+5u+3v=128 & (2) \\ 3x+5y+7z+6u+4v=116 & (3) \\ 2x+5y+3z+9u+4v=112 & (4) \\ x+3y+2z+8u+5v=95 & (5) \end{cases}$$

这个问题，不论用直除法或互乘对减法求解，都较复杂，就象刘徽所说的"用算而布毡"那样麻烦。因此他写了一篇叫《方程新术》的论文，附于"方程"之末。他在这篇文章中提出了三种解法。

第一种解法：中心思想是消去常数项，再把每行（方程）的项数减到只剩两项，然后就用比例表出。这时只要求出一个未知数的解，其余可立即求出来。刘徽对此有一段精采的叙述："令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。……"他用此法求得两两"相当之率"，即

$$4x=7y$$

$$3y=4z$$

$$5z=3u$$

$$6u=5v$$

由此得$\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{u}{5}=\frac{v}{6}$。

其次，刘徽由（3）－（4）得

$$x+4z-3u=4 \qquad (6)$$

再据$\frac{x}{7}=\frac{z}{3}$有$z=\frac{3x}{7}$，据$\frac{x}{7}=\frac{u}{5}$有$u=\frac{5x}{7}$，代入（6），有$7x+12x-15x=28$，故得$x=7$。这样，其余都可求出。

第二种解法：中心思想是由各式连续减（6），消去首项。因为（6）式首项系数是1，可以不必互乘，避免麻烦。用此法，先求出$u=6$，再依次求出其余。

第三种解法：中心思想是通过连比例这一环节来解决的，就是“置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各依其率乘之，并以为法。……以减行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得。”“群物通率”就是由第一法之比例有

$$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6$$

再通过（6）式（即“减行”）即可求得解答。

这三种解法之间有紧密联系，互相利用现成结果，提供了方便条件。刘徽通过自己的钻研，取得这样的成绩，值得称道。

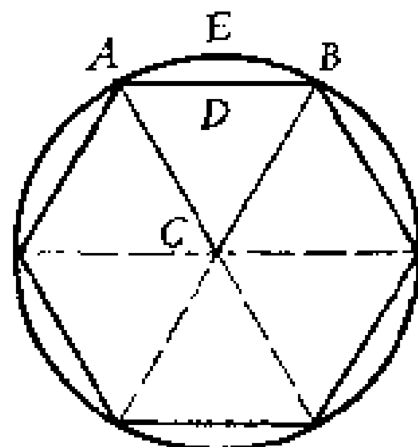
刘徽还研究过等差级数，并且得出求和公式。

刘徽在几何方面的贡献

刘徽在几何方面做过许多工作，取得不少重要成就，归结

起来主要有以下几个方面：

1．割圆术。刘徽发现前人泥守的"周三径一"之率，仅是圆内接正六边形的周长和圆径之比（图2—4），而非圆周长与圆径之比，以3为π值是极不精确的。因此他提出了科学的方法——割圆术，求出更好的圆周率值。他为计算方便起见，"置圆径二尺，半之为一尺，即圆里六觚之面也"。就是以一尺为半径作圆，再作圆内接正六边形，然后逐渐倍增边数，计算出正十二边形、正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形和正一百九十二边形的面积。后两多边形的面积，刘徽求得各为$S_{96}=313\frac{584}{625}$（平方寸）和$S_{192}=314\frac{64}{625}$（平方寸），设$S$为圆面积，于是有



2—4　刘徽割圆图

$$S_{192}<S<S_{192}+(S_{192}-S_{96}),$$

即
$$314\frac{64}{625}<S<314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}。$$

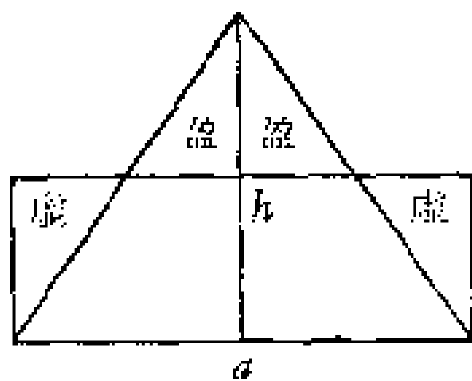
刘徽在这里舍弃分数部分，把314取作圆内接正192边形之面积。因为已经假定圆半径为1尺，故得$\pi=3.14$。刘徽又用几何方法把它化为$\frac{157}{50}$。后人把3.14或$\frac{157}{50}$叫做"徽率"。

刘徽认为还可以继续求下去，不过实际上他没有再求。割圆术的出现，在世界数学史上虽晚于希腊的阿基米德，但在我国数学史上却是十分重要的。

2．几何定理的证明。刘徽用几何方法比较严密地证明了不少几何定理，其中包括平面几何和立体几何定理。他证明的

主导思想是凡能用"以盈补虚"的，不论平面问题还是立体问题，都用这种方法把未知转成已知。对于另外的定理，他则提出新的解决方法。

在平面几何定理的证明中，有关于"勾股容圆"等，有两条面积的计算法则，有一条是勾股定理。对勾股定理的证明只是说"勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补各从其类，因就其余不动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也"。具体证法可能与欧几里得（Euclid）《几何原本》卷一第47题相似。关于面积的两条，一条是三角形面积定理，一条是梯形面积定理。证明都是用"以盈补虚"。我们以前者为例来说明，刘徽说："半广者，以盈补虚为直田也。"这就是把三角形的高 h 二等分，补成一个长方形（图2—5），其面积为 $\frac{1}{2}ah$，正好是原三角形的面积。

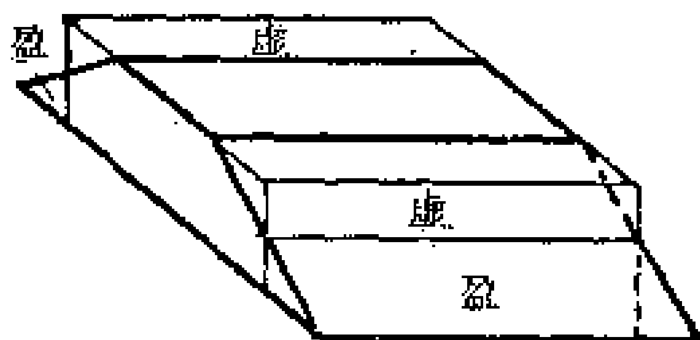


2—5　"以盈补虚"（平面）

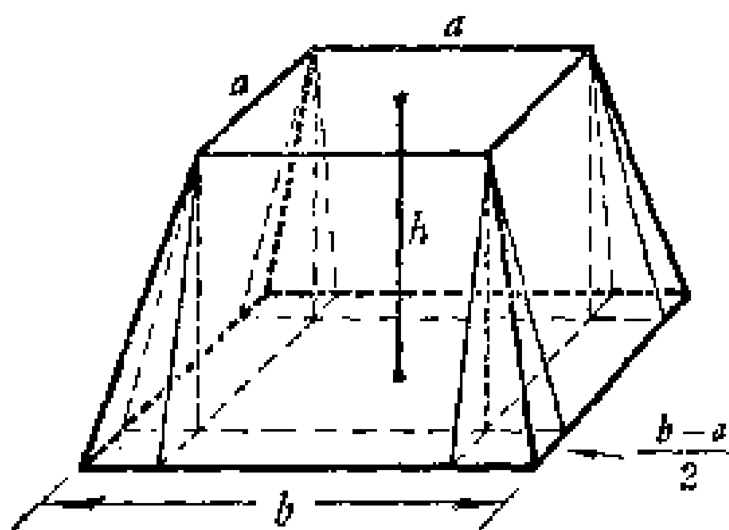
关于立体几何定理，刘徽证明得较多。大体上可以分为两类：一类是多面体体积的计算法则，他也用"以盈补虚"的方法去证明；一类是圆锥和圆台的体积计算法则，他转化为某种相应的多面体，中间通过他首先发现的一条重要原理去解决。

刘徽对楔形平截体的体积计算法则给了证明。就是"并上、下广(a,b)而半之者，以盈补虚，得中平之数，以高(h)若深乘之，……得一头之立幂"，就是把平截体的侧面梯形变换成等积的长方形(图2—6)，其面积为 $\frac{a+b}{2}\times h$。然后"又以袤(c)乘之者，得立实之积(v)"，即得公式

$$V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$$



2—6　“以盈补虚”（立体）



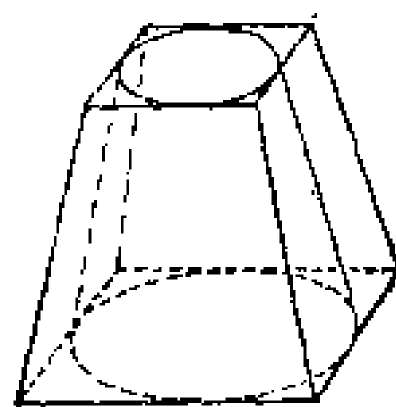
2—7　正方台分解

对于正方台体积的计算法则的证明，刘徽把它分解成一个正方柱、四个相等的底为长方形的直角楔形（堑堵）和四个相等的四棱锥（阳马）（图2—7）。这些立体的体积都能求出，最后加起来就得到公式

$$V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$$

或者是把正方台补充成三个相等长方体，也可得出上面的结果。

在证明圆锥和圆台的体积计算法则时，刘徽在其外作一外切正方锥或正方台。这时他注意到用平行于底的平面去截（图2—8），所得之截口圆与外切正方形的面积之比恒为 $\pi:4$。于是他发现它们的体积之比也应是 $\pi:4$，即



2—8　圆台及其外切正方台

$$V:V'=\pi:4$$

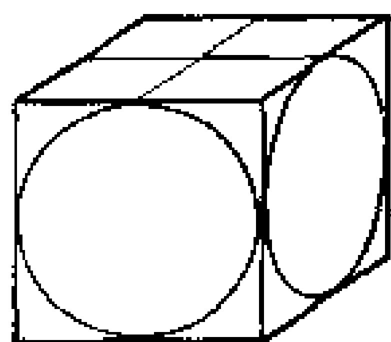
其中 V、V' 分别为圆台（锥）及其外切正方台（锥）体积。因为 V' 可以求得，所以由上式可得

$$V=\frac{\pi}{4}V'$$

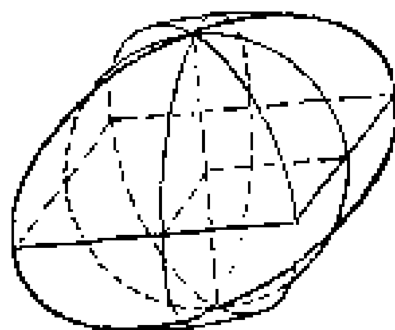
对于等高的阳马和鳖臑两种立体，刘徽也进行了类似研究。他认为用平面去平截一个立方体分解出来的两种立体时，如果截面的面积之比为2:1，那么它们的体积之比也是2:1。①

刘徽在这里用到了一条重要原理：如果两个等高的立体，用平行于底的平面截得的平面面积之比为一定值，那么这两个立体的体积之比也等于该定值。这个原理可以称之为“刘徽原理”，它可以用现代积分学进行证明。

3. **关于球体体积的研究。**刘徽和张衡一样也注意到《九章算术》中关于“立圆”（球）的研究，并且对张衡的研究也进行了探讨，纠正了他的错误。在这个基础上，他着手解决球体体积的准确计算，并试图通过上述的原理把球的体积计算转换到另外一个能计算体积的立体上去。为此他作球的外切立方体，同时用两个直径等于球径的圆柱从立方体内切贯穿（图2—9），这时球就被包含在两圆柱相交的公共部分中，而且与圆



2—9　两圆柱贯穿立方体



2—10　“牟合方盖”

柱相切。刘徽只保留两圆柱的公交部分，给它取名为“牟合方

① 李俨：《中国数学大纲》（修订本）上册，1958年，科学出版社，第53—54页。

盖”① （图2—10）。球和“牟合方盖”用水平截面去截，其面积之比就恒为$\pi:4$，于是他用上述原理立即得到：

$$V_{球}:V_{牟}=\pi:4$$

或
$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟}$$

如果“牟合方盖”的体积能够计算出来，那么整个问题就解决了。刘徽力图求出$V_{牟}$，然而没有达到目的，最后，他感慨地说：“观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆纠缠，浓纤诡互，不可正等。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。”就是说问题复杂，找不到解法，只好留给后人解决。

刘徽虽然没有把球体的体积计算问题加以解决，但是他的思路正确，且为后人解决这个问题打下基础。

4．极限观念。早在春秋战国时代虽已有了初步的极限观念，可是长期没有得到进展，《九章算术》等书中根本没有涉及到这类问题。刘徽在不少数学问题的处理上，最终都引到极限观念上来。

刘徽在割圆术中叙述了极限观念。他用倍增圆内接正六边形的边数，以正3×2^n边形当$n\to\infty$时面积的极限来定义圆的面积。他说：“又按为图②，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥（越）细，所失弥少。割

---

① 丹麦的瓦格纳(D.B. Wagner)曾对“牟合方盖”有一种很有意思的解释，他认为在我国湖南马王堆出土的一个漆盒就是这种东西。见D. B. Wagner, Lui Hui and Tsu Ken—Chih on the Volume of a Sphere, Chinese Science, 3(1978), pp.59—79。

② 原图已经失传。

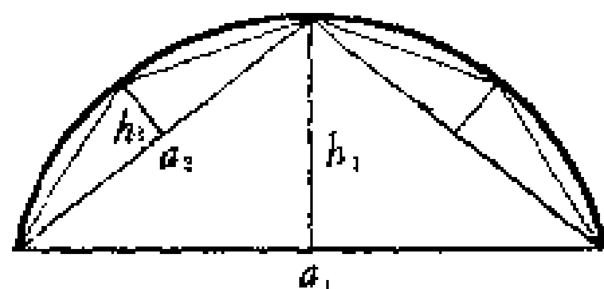
之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”就是：设 S 为圆面积，$S_{3\times2^n}^n$ 为圆内接正 3×2^n 边形的面积，则刘徽的思想与

$$S=\lim_{n\to\infty} S_{3\times2^n}$$

（n 从 1 开始）相近。

刘徽发现：《九章算术》中关于弓形面积的计算方法不够精确，特别是当弓形的高越大时旧法的误差也越大，于是把割圆术用到弓形上，以极限观念定义了弓形面积。

他以弓形的底 a_1 和高 h_1 在形内作内接等腰三角形，求出其面积 $\triangle_1=\frac{1}{2}a_1h_1$。再以此三角形的两腰为底作小弓形内接等腰三角形，每一个小弓形的面积 $\triangle_2=\frac{1}{2}a_2h_2$。因两小弓形的面积相等，故有 $2\triangle_2=a_2h_2$（图2—11）。如此类推下去，到第 n 次就有 $2^{n-1}\triangle_n=2^{n-2}a_nh_n$。把这些三角形的面积加起来，设 S_n 为其和，则



2—11　弓形割圆术

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\triangle_i=\sum_{i=1}^{n}2^{i-2}a_ih_i$$

把上式取极限，并设 S 为弓形面积，就有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{i-2}\triangle_i$$

这可以解释刘徽所说的“割之又割，使至极细，但举弦矢相乘之数，则必近密率矣”一语的意思。

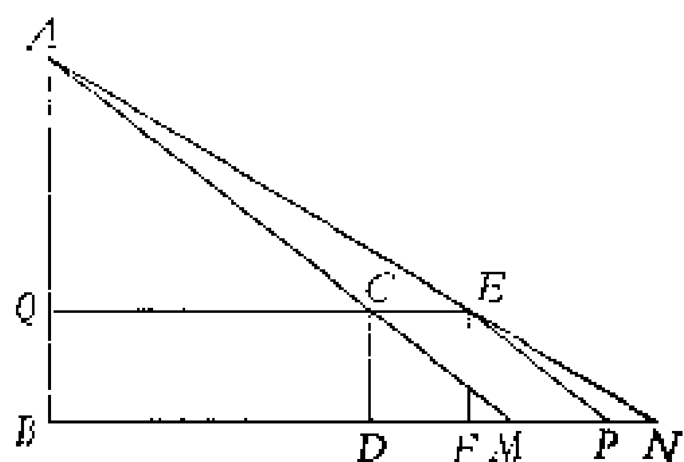
刘徽在体积研究和开方中也都用到了极限观念。例如在棱锥的研究中，他把立方体进行分解，以求棱锥的体积，“若为数以穷之。置余高、袤、广之数各半之，则四分之三又可知

也。半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？”就是逐次分割棱锥体，并求出它们的体积，分割到无穷次，问题就解决了。

总括以上数点，刘徽在数学中多次用极限方法处理问题，而且运用比较熟练，说明他已经对极限有了相当的认识。这是刘徽在数学上极其重要的成就，充分反映出他数学思想的先进。

刘徽的重差术

“重差”是我国古代数学在测量上的一种重要应用，在《周髀算经》中已有类似问题。后来张衡在《灵宪》中曾提到“重差钩股”，用于天体测量。刘徽在前人工作的基础上，对重差术继续研究，可能还应用过，并作了一些总结。在他注《九章算术》所写的序中对重差术的意义、方法和他研究的大概经过有一段较详细的记述。他说：“凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也。”这是说重差术是用于测量那些不可到达的远距离，“以重差为率”指的是用两次差并通过“率”，即比例相似进行计算。



2—12　重差测日

刘徽还在同一序中举一实例说明重差术的内容：“立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘间为

实，实如法而一，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。”设A为太阳，B为“日下”，在地平面上南北两点D、F立两个竿（等高）DC、FE。A、C连线与地平面交于点M，A、E连线与地平面交于点N。过点E作AM的平行线EP，C、E连线与AB交于点Q。PN为景差，即$FN-DM$（图2—12）。因为$\triangle ACE\backsim\triangle EPN$，$\triangle AQC\backsim\triangle EFP$，故有

$$AQ=\frac{CD\times DF}{FN-DM},\quad BD=\frac{CD\times FN}{FN-DM}$$

而“日去地”的高为AB，即$AQ+QB$，故前式改为$AB=\frac{CD\times DF}{FN-DM}+QB(CD)$。这里两次用到差$FN-DM$，故曰“重差”。在古代把大地看做平面的情况下，这种算法是对的。特别是重差术在小范围的地面上使用，有很大的实际价值。

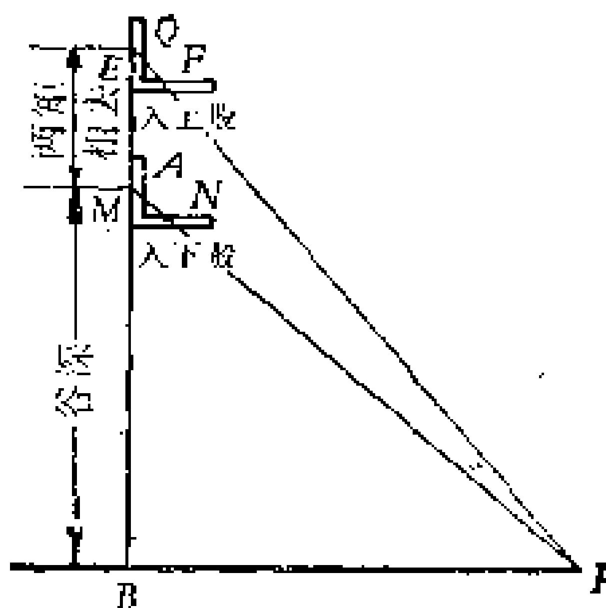
刘徽通过自己的实践，看到了重差术的用途，于是进行了研究、整理，“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望”。他的《重差》一卷九个问题，附在《九章算术》之末。到唐代人们又把它拿出来（改为单行本），以第一问测海岛高远而称为《海岛算经》。

《重差》九个问题包括了刘徽自己所说的“重表”、“累矩”、“三望”、“四望”方面的内容。其解法形式有三种，即重表法（立两个等高的竿）、累矩法（用两个矩代替“表”）和绳表法（用绳和“表”），本质上没有区别。前面所讲的计算太阳高远问题，是重表法，不再重举。下面列举另外两法的例子。

累矩法的例子（《重差》第四题）：“今有望深谷，偃矩

岸上，令句高六尺，从句端望谷底，入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈，更从句端望谷底，入上股八尺五寸，问谷深几何？”

刘徽的解法是：“置矩间以上股乘之为实，上下股相减，余为法除之。所得以句高减之，即得谷深。”如图2—13，AQ 为矩间（即两矩相去），EF 为“上股”，MN 为“下股”，$AM(QE)$为句高，MB为谷深。根据刘徽的解法有



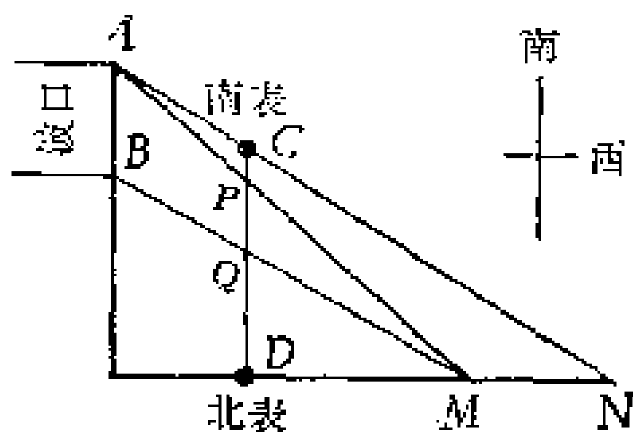
2—13《重差》第四题示意图

$$MB=\frac{AQ\times EF}{MN-EF}-AM$$

将已给数字代入有 $MB=419$尺，即所得答案。

绳表法的例子（《重差》第六题）：“今有东南望波口，立两表，南北相去九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表六丈，薄地遥望波口南岸入索北端四丈二寸。以望北岸，入前所望表里一丈二尺。又却后行去表十三丈五尺，薄地遥望波口南岸，与南表参合。问波口广几何？”

刘徽的解法是（图2—14）：“以后去表（DM）乘入索（PD），以表相去（CD）而一。所得，以前去表（DM）减之，余以为法。复以前去表（DM）减后去表（DN），余以乘入所望表里（PQ）为实，实如法而



2—14《重差》第六题示意图

一，得波口广（AB）。”就是下式

$$AB=\frac{PQ\times(DN-DM)}{\frac{DP\times DN}{CD}-DM}$$

题中所说的“索”就是绳子，“薄地”就是拉绳与地面相接，图中 C、D间（即两表间）便是拉绳所成之直线。这个问题是属于“三望”的一类。

如果把重差术用三角去解，所得结果一致。由此可见，我国的重差术和西方的平面三角起着同样的作用，这也是我国数学的一个特色。

第二节 数学理论研究的继续发展

由晋初到南北朝（即由公元三世纪后期到六世纪后期）的三百年间，虽然多处于分裂状态，但是数学仍有一些发展。这一时期完成了不少数学新著，出现了象祖冲之这样杰出的数学家，数学在天文历法、度量衡研究和其它方面得到广泛应用，在理论上主要是沿刘徽的道路前进的。

《元嘉历》中的数学

1. **《元嘉历》与作者何承天**。两晋南北朝所撰历法，包括改名、改编的在内总共有25种之多。其中最有名的要数《元嘉历》和《大明历》。

何承天（公元370—447年），东海郯①（今山东郯城北）人，生活于东晋与南北朝期间。他在南朝刘宋初为太子率更令（官名），为当时著名的天文学家。何承天于元嘉二十年（公元443年）完成《元嘉历》，送到刘宋朝廷，并于二十二年（公元 445 年）开始在南朝施行。他有许多先进的认识，对于汉代历法研究中渗入所谓"谶纬"②思想，表示反对。他认为把"谶纬"作为"建历之本"非常荒谬，"此之为弊，亦已甚矣"③。何承天特别称赞晋朝杜预（公元222—284年）的一句名言，就是研究历法应当是"顺天以求合，非为合以验天"，意思是要根据天体运行的实际找出其规律性来制订历法，而不能反过来。历法应根据实测，而且要"随时迁革，以取其合"④。因此他编出来的《元嘉历》有较高的水平。在这部历法中使用了不少先进的数学工具。

2．一种分数近似方法。设分数$\frac{x}{y}$是所要求的，使它逐渐接近实测数据，而$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$为已知的两个分数，且$\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d}$。怎样解决这个数学问题呢？何承天在调整"日法"的时候，创造了一种算法。"日法"就是历法计算中单位日以下的奇零分数的分母，例如古代《太初历》的"日法"是81，一个月的日数是$29\frac{43}{81}$日。但是如何确定较好的"日法"就是一个问题。何承天以"四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率"⑤

---

① 郯音谈，tán。
② 谶音趁，chèn，"谶纬"是指一种迷信的人认为以后要应验的预言。
③ 何承天：《何衡阳集》"历议"条。
④ 何承天：《何衡阳集》"上新历法表"条。
⑤ 《宋史》卷七十四《明天历》。

进行调整。所谓"强率"与"弱率"就是过剩和不足近似值，然后"于强弱之际，以求日法"。把$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$的分子分母分别相加得分数$\frac{a+c}{b+d}$，仍为弱率，于是再调，有$\frac{a+2c}{b+2d}$。何承天就这样调了15次，得$\frac{9+15\times 26}{17+15\times 49}=\frac{399}{752}$①，把752定为日法。这样求得的$\frac{399}{752}$确实比$\frac{26}{49}$和$\frac{9}{17}$都要好。不过还不是准确值，如需要更好的数值还可以继续往下调，多算几次，就接近测定值。

何承天的近似算法是数学上的一种创造。外国一直到十四世纪才出现类似的算法，晚了八九百年。这种算法可以称为"何承天算法"。

3．圆周率。何承天对圆周率也有研究，他在计算周天度数和"南北相去"时用到了与$\frac{22}{7}$相近的圆周率值。"周天三百六十五度三百四分之七十五。天常西转，一日一夜，过周一度，南北两极，相去一百一十六度三百四分之六十五强，即天经也。"②由此知道，

$$\pi\approx\frac{365\frac{75}{304}}{116\frac{65}{304}}=\frac{365\times 304+75}{116\times 304+65}=3.1428\cdots$$

这个计算的第二步相当于何承天算法。其中$\frac{365}{116}$相当于π的过剩近似值（3.155…），$\frac{75}{65}$相当于不足近似值。因二者相差很大，故调整304次才得到上述结果。何承天在这个计算中可能不是有意识地用上述算法，而是在计算过程中发现304有特殊

① 钱宝琮：《中国算学史》上卷，1932。
② 《隋书·天文志》。

的意义，它是调整的次数。估计这使他想到这可以成为一种近似值的计算方法，于是总结为“何承天算法”。

祖冲之在数学方面的贡献

1．祖冲之的主要事迹。祖冲之（公元429—500年），字文远，范阳遒①（今河北省涞水县北）人，生活于南朝的宋齐之间。他青年时代在刘宋政府的华林学省从事研究工作，后来到南徐州（今安徽南部、江苏北部地区，行政中心在今镇江市）做从事史，不久又回来担任公府参军。这期间行政事务虽然很多，可是他仍利用一切工余时间从事天文历法和数学研究。



祖冲之

祖冲之的研究工作踏实认真，努力发掘前人的研究成果，他曾说：我“搜练古今，博采沈奥。唐篇夏典，莫不揆量。周正汉朔，咸加该验。罄策筹之思，究疏密之辨”②。对前代的历法书都进行分析比较，同时还进行了实测，对八尺高标杆的日影长度观测持续长达十年之久。在此基础上，于宋大明六年（公元463年）完成了《大明历》。

---

① 遒音求，qiú。
② 《宋书·律历志下》。

祖冲之，后来出任娄县令（娄县在今江苏昆山县东北），到齐灭刘宋之后他又到齐政府担任谒者仆射（是一种掌管朝廷宴会等的礼节官）。在此期间，他对机械的研究非常感兴趣，先后制造了指南车、千里船、水碓磨、欹器①、刻漏，还有一种很好的运输器械，其中千里船和水碓磨都是生产工具。他还对古代的许多典籍进行了研究，并作了注解，他又是乐律家，并精于棋艺。他晚年担任南朝首都建康（今南京市）的长水校尉，向朝廷提出《安边论》，主张"开屯田，广农殖"，兴建大业，巡行四方。实际上，都不可能办到，不久他与世长辞。

祖冲之最大的成就是在数学方面。他研究过《九章算术》和刘徽的注解，同时给《九章算术》和刘徽的《重差》作过注，并自著《缀术》一书。可惜这些重要的文献都已失传，是科学史上的一个重大损失。现在只能从其它著作中找到一些有关祖冲之数学成就的记载。

2．在圆周率方面的伟大贡献。祖冲之和刘徽一样，也考校过度量衡。祖冲之在同别人辩论时，曾经指出："汉时斛铭，刘歆诡谬其数"是"算氏之剧疵"。这是指王莽执政时刘歆研究度量衡过程中所使用的圆周率是不精确的。祖冲之在刘徽的基础上继续研究圆周率，经反复计算，求出新值。再用新值考校刘歆斛斗，结果是"此斛当径一尺四寸三分六厘一毫九秒二忽，庣旁一分九毫有奇"。以此与刘歆结果相比较，发现："刘歆庣旁少一厘四毫有奇，歆数术不精之所致也。"②

① 欹器，欹音衣 yī，是倾倒的意思。欹器是一种自警之器，将其吊起来，口朝上，往器里注水将满时它便自动翻倒将水泼出，以此警告自己不要自满。

② 《隋书·律历志上》。

这说明祖冲之由于研究度量衡的需要，才去研究圆周率。

祖冲之在圆周率方面取得很大成就，《隋书》上记载了如下的材料：

“……右之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒[①]数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，周二十二。……”[②]这是一段非常重要的记载，包括以下一些内容：

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

密率：$\frac{355}{113}$

约率：$\frac{22}{7}$

祖冲之用“盈朒二限”来限定一个尚未完全知道的数值的范围是一种创见。但更主要的还是圆周率值。盈朒二限的平均值3.14159265，已经准确到小数第8位，是当时世界上最好的结果。

“密率”$\frac{355}{113}$更是数学史上的卓越成就。在外国一直到十六世纪才由德国的渥脱(Otto)等重新求得，比祖冲之晚了一千多年。因此，已故日本数学史家三上义夫曾建议把$\frac{355}{113}$叫做“祖率”，以纪念祖冲之的贡献。

因为祖冲之的数学著作《缀术》已经失传，而《隋书》又只记载结论而没写求法，所以祖冲之是怎样求得这样好的圆周

---

① 朒音 nü，亏缺或不足的意思。

② 《隋书·律历志上》

率值，长期以来成为数学史上的一个谜，直到现在也没有解决。近几十年来，提出了不少推测，特别是求得密率的方法问题更是人们注意的中心。钱宝琮① 主张是用何承天算法求得。是以$\frac{22}{7}$和$\frac{157}{50}$为强弱二率，进行调整，而求得密率。华罗庚②则主张是用渐近分数求得。笔者认为可能是继续使用刘徽的割圆术，并且把它发展为从圆内接正六边形和外切正六边形周长同时起算，算到内外各为正 24576($=2^{13}\cdot3$)边形时，周长各得3.14159261和3.14159270208，π在它们之间。经四舍五入仍可有

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

在这一计算过程中，会得到一系列圆周率值。把其中的一些化成了分数形式，而$\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$都便于记忆就有意地保留下来，并分别取名“约率”和“密率”③。当然，这也是一种推测，不能据为定论。这样精密的结果决不会凭经验获得，一定是经过理论的计算得到的。

祖冲之的圆周率后来得到应用，例如后周保定元年（公元561年）曾用祖冲之圆周率值计算玉升的容积：“（玉斗）内径七寸一分，深二寸八分……今若以数计之，玉升积玉尺一百一十寸八分有，斛积一千一百八寸五分七厘三毫九秒。”④由圆柱体积反求其所用之圆周率值为3.141592938，这与“密率”的前九位3.14159292相近。

3．球体积的计算。祖冲之研究了《九章算术》中误差很

① 钱宝琮：《中国算学史》上卷，1932，第58页。

② 华罗庚：《旧珍宝新光芒》，载《北京教师月报》，1951年第二期，第23—27页。

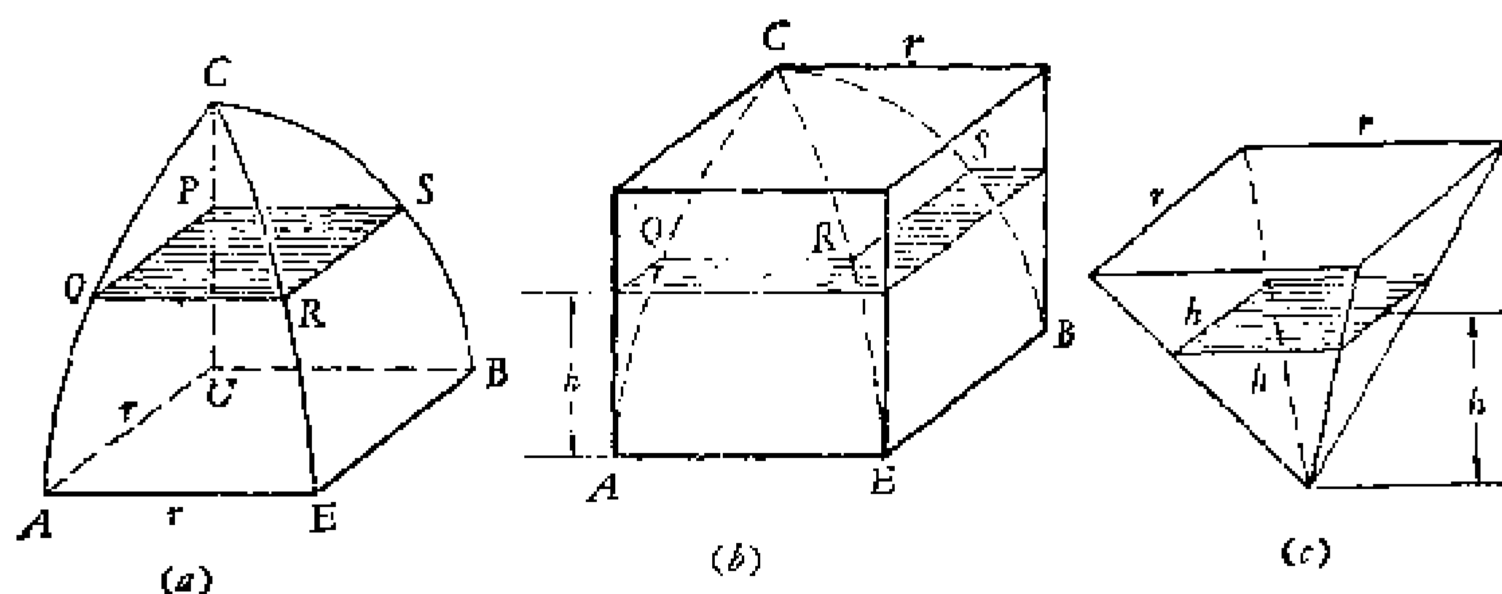
③ 李迪：《祖冲之》，1977，上海人民出版社，第43—45页。

④ 《隋书·律历志上》。

大的“开立圆术”，也研究了张衡、刘徽在这个问题上的尝试。他批评了张衡，说他“述而弗改”，同时又从刘徽的未竟之业中获得启发。祖冲之和他的儿子祖暅在刘徽的基础上进行了深入探讨，终于使问题得到解决。

祖冲之父子对于球体体积计算的解决方法完全沿用了刘徽的一套思想，抓住了关键性的“牟合方盖”的体积计算。但是他们实际着手处理的不是牟合方盖本身，而是一个立方体取出其内切牟合方盖的剩余部分。为方便起见，我们把它叫做“方盖差”。再把“方盖差”自然分成八个相等的小立体，每一个称它为“小方盖差”。

祖氏父子考虑问题的方法进一步简化，即仅从八分之一立方体和所含的八分之一的牟合方盖入手。这样做是完全正确的。



2—15

在小方盖差中（图2—15(a)），PQ 是这方盖水平截平面正方形的一边，令其为 a，UQ 是球半径 r，UP 是高，以 h 表示。QPU 是一直角三角形，于是由勾股定理得 $a^2=r^2-h^2$，这正是截平面 $PQRS$ 的面积。在同一位置上的小立方体的截

面面积为 r^2，而 r^2 与 a^2 之差，即 $r^2-a^2=h^2$，正是小方盖差在等高处的截面面积（图2—15(b)）。这个面积有一非常突出的特点，就是它正好是截面高度 h 的平方。祖氏父子抓住了这个特点，进行研究，结果发现：底边为 r，高也是 r 的倒正方锥的截面面积也有这个特点（图2—15(c)）。就是说，小方盖差与倒立正方锥在等高 h 处的截面面积总成对的相等。这时，祖氏父子看到它们的体积关系，提出了“幂势既同，则积不容异”的原理，其中“势”是高，“幂”是面积，意思是说两个高相等的立体在任意等高处的截口的面积如果总成对相等，则它们的体积就不能两样。由此得到小方盖差和倒立正方锥的体积相等的结论。

正方锥的体积可以求出，它等于同底立方体的体积的三分之一，因而也就知道了小方盖差的体积。由小立方的体积减去小方盖差的体积，余下的就是八分之一牟合方盖的体积，也就是 $r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{1}{8}V$（$V$：牟合方盖体积），于是

$$V=8r^3-\frac{8}{3}r^3=(2r)^3-\frac{1}{3}(2r)^3=\frac{2}{3}(2r)^3$$

这就是牟合方盖的体积。

但是，刘徽早已求出

$$V_{球}:V_{牟}=\pi:4$$

因而祖氏父子立刻就得到

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(2r)^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

即 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$。此公式就是球体体积的正确公式。当时祖氏父子以 $\pi=\frac{22}{7}$ 入算，公式就变形为

$$V_{球}=\frac{11}{21}D^3\ (D=2r)$$

从《九章算术》以来的四百多年中，有关球体体积的计算，经过许多人的不懈努力，最后获得彻底解决，这也是我国数学史上一件大事，它不仅说明我国人民有能力从理论上独立解决实践中提出的数学问题，而且表现出方法的独特性。

祖氏父子的原理是刘徽原理的特殊情形。当刘徽原理中的比值等于1的时候，就变成了祖氏的结果。因此可称此特例为"刘-祖原理"。祖氏父子比刘徽高明的地方在于吸取了刘徽的教训，不再去钻那个牟合方盖的牛角尖，而改为研究方盖差的体积，从而找到了解决问题的途径，也正是这条途径才引导他们想出"幂势既同，则积不容异"的原理。由于条件限制，刘徽未能这样做。但刘徽的失败却导致了祖冲之父子的成功。

4. 祖冲之父子的《缀术》及其它。祖冲之父子对数学进行了广泛的研究。据历史记载，他们都有《缀术》之作，父亲著《缀术》五卷，儿子著《缀术》六卷，两书之间有什么关系找不到记载，推测可能是先有父亲的五卷，儿子进行修改并且加了一卷。《缀术》由于原书早已失传，无法确切知道其具体内容。它是在《九章算术》及刘徽注的基础上完成的数学杰作，唐王孝通称赞说："祖暅之'缀术'，时人称之精妙。"①这个"缀术"似乎是指的一种方法，由此可以推想："缀术"既是书名，又是方法名称。有关圆周率的计算和球体积的解决，无疑已包含于其中。祖冲之"又设开差幂，开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理"。②很显然，"开差幂"、

① 王孝通：《上缉古算经表》。
② 《隋书·律历志上》。

“开差立”以及“正圆参之”都是《缀术》的内容。

“开差幂”中的“差幂”一词在刘徽注《九章算术》时就已用过，指的是面积差，“开”是指从面积求边长，由开方而来。因此，“开差幂”应包括由矩形面积差求某一边之长。以同一思想去理解“开差立”的含义，可能是包括由长方体体积差求其长、宽、高。问题就归结为解一个二次方程和一个三次方程。解二次方程在当时并不是件难事，因为在这之前的《九章算术》中已有这类问题。求三次方程的一个正根，就比较困难了。

“开差幂”和“开差立”不一定只限于长方形和长方体，

经》、《五经算术》、《数术记遗》和《夏侯阳算经》等几种。这些书基本上反映了当时社会各方面的需要。

1. 《孙子算经》。现传本《孙子算经》三卷，大概成书于祖冲之以前。书前有序一篇，序中主要讲数学的用途，承认数学可以用于天文、测量、度量衡等方面。但是却认为数学"采神祇之所在，极成败之符验"，这是一种迷信思想。

《孙子算经》的内容远不如《九章算术》丰富和深奥。其中许多浅显的内容如进位制、九九口诀、四则算法等都详加记述。另外，如各种粮食调换的比例等则来自《九章算术》。这部书中有大量属于日常生活的应用题，可以说是一本启蒙的算术入门书。书中最有价值的内容是关于筹算法和"物不知数"问题。

《孙子算经》是目前发现的一本详载筹算法的书，其第一卷记有"凡算之法，先识其位。一从①十横，百立千僵，千十相望，万百相当"。讲的是算筹的摆法。同时详细讲了筹算乘法和除法的步骤。由于在第一章已经讲过，这里不再重复。

《孙子算经》卷下第26题是"物不知数"。原题是"今有物，不知其数。三、三数之，賸二；五、五数之，賸三；七、七数之，賸二。问物几何？答曰：二十三。"这个问题是一个同余式组，设N为所求之数，就是

$$N\equiv 2(\mathrm{mod}3)\equiv 3(\mathrm{mod}5)\equiv 2(\mathrm{mod}7)$$

《孙子算经》还给出了解法，使我们初步窥见古代解同余式组的大体过程。解法全文是："三、三数之賸二，置一百四十；五、五数之賸三，置六十三；七、七数之賸二，置三十，并

① 从与纵同。

之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三、三数之賸一，则置七十；五、五数之賸一，则置二十一；七、七数之賸一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。”这个解法分两部分，第一部分属于本题，即

$$N=140+63+30-210=23$$

其中 $140=70\times2$，$63=21\times3$，$30=15\times2$，$210=2\times105=2\times(3\times5\times7)$，因而上式是由下式得来：

$$N=70\times2+3\times7\times3+3\times5\times2-2\times105=23。$$

第二部分相当于解下列同余式组：

$$N\equiv r_1(\bmod 3)\equiv r_2(\bmod 5)\equiv r_3(\bmod 7)$$

解法步骤是

$$N=70r_1+21r_2+15r_3-105p$$

p 为正整数。如果按原文理解，则 $r_1=r_2=r_3=1$，那么N和 p 均等于 1。但是，其解法本身带有一般性。

这个解法可以推广到任意 n 个两两互素的自然数的同余式组 $N\equiv r_i(\bmod p_i)(i=1,2,\cdots\cdots n)$ 的情形。设 $m=p_1p_2\cdots\cdots p_n$，如果能找到一组 k_i，满足 $k_i\cdot\frac{m}{p_i}\equiv1(\bmod p_i)$，那么

$x=\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{m}{p_i}r_i(\bmod m)$，问题就解决了。

“物不知数”问题，在欧洲，一直到十九世纪初法国数学家高斯（Gauss，公元1777—1855年）才在他于1801年出版的《算术探究》中给出了一般性定理。因此，“物不知数”问题在世界数学史上有一定的地位，外国称其为“孙子定理”或“中国剩余定理”。

2．《张邱建算经》。这部算经是南北朝时期的著作，序题“清河张邱建”，作者事迹不详。书中有一题目说“今有率

户出绢三匹，依贫富欲以九等出之，令户各差除二丈”，和魏天安元年（公元466年）“因民贫富为租输三等九品之制”相符合，这种户调制度于太和九年（公元485年）废弃不用，而颁行均田法。由此可见，《张邱建算经》大约是在466—485年间写成的①。

《张邱建算经》所载问题，大部分都是社会上的实际问题，有关测量、纺织、交换、纳税、冶炼、土木工程、利息等方面的计算问题都有，涉及的方面较广，正如作者在序中所说写书的目的是：“余为后生好学有无由以至者，故举其大概而为之。”总的来说，书的内容比较严肃，切合实际，有一些创见，是《九章算术》以来一本较好的书。

张邱建在序中一开头就说：“夫学算者不患乘除之为难，而患通分之为难。”接着讲了通分和约分方法。他很注意分数计算的简化。需要以最大公约和最小公倍的地方，他都先求出这两个数。

书中对级数的研究是一个很大的进步，根据已知条件的不同，给出了六七个等差级数公式，如卷上第22题“今有女善织，日益功疾”，已知级数的首项、项数和总和，求公差问题。设a_1为首项，S为总和，n为项数，d为公差，则《张邱建算经》的解法相当于$d=\left(\frac{2S}{n}-2a_1\right)\div(n-1)$。第23题“今有女子不善织，日减功迟”，是一个已知项数、首项和公差，求总和S问题，用公式

$$S=\frac{1}{2}(a_1+d)n$$

① 钱宝琮校点《算经十书·张邱建算经提要》。

《张邱建算经》中最末一题是闻名于世的"百鸡问题"。原题是："今有鸡翁（公鸡）一，直（值）钱五；鸡母一，直钱三，鸡雏（小鸡）三，直钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？"设x、y、z分别为鸡翁、鸡母、鸡雏的只数，根据题意，有

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

两个方程有三个未知数，因此是不定方程。书中给出了三组解：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78, \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81, \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$$

至于解法，书上只说："鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。"寥寥十五个字，解得非常简单。这合乎现代解法，设t是整数参数，则$x=4t$，$y=25-7t$，$z=75+3t$。满足这组式子的t值只能是1、2、3，因此合乎题意的解答也仅有书上的三组。因此，张邱建是数学史上一题多解的首创人。

此外，《张邱建算经》中还讲了线性方程组解法、二次方程、算术难题的简化解法、重差术应用等等。

在《张邱建算经》序中有"夏侯阳之方仓，孙子之荡杯"的话，可见《夏侯阳算经》和《孙子算经》应在《张邱建算经》之前。现传本《夏侯阳算经》已非原书，可能是唐代韩延增修本。

3. 《五曹算经》、《五经算术》和《数术记遗》。这三本数学书，现在都有传本，都是北周甄鸾编或注的。内容比较浅显，没有什么创见。甄鸾信佛教，不信道教，写了一本

《笑道论》，宣扬佛教，嘲笑道教。还研究过佛家经典和历法。注过《周髀算经》等书。因此，在他写的数学书中有明显的佛教内容。《五曹算经》可能是他当地方官时写的一本算术问题及解答集。

《五经算术》是甄鸾对古代经典，如《尚书》、《周易》《论语》、《周礼》、《礼记》等书中一些与数学有关问题的注释集。这本书有助于我们了解古代经典。但是书中用数学去解释"丧服经[①]带"和"丧服制食米溢数"等古代治丧中的数学问题。书名虽为"算术"，然实质是研究"五经"。

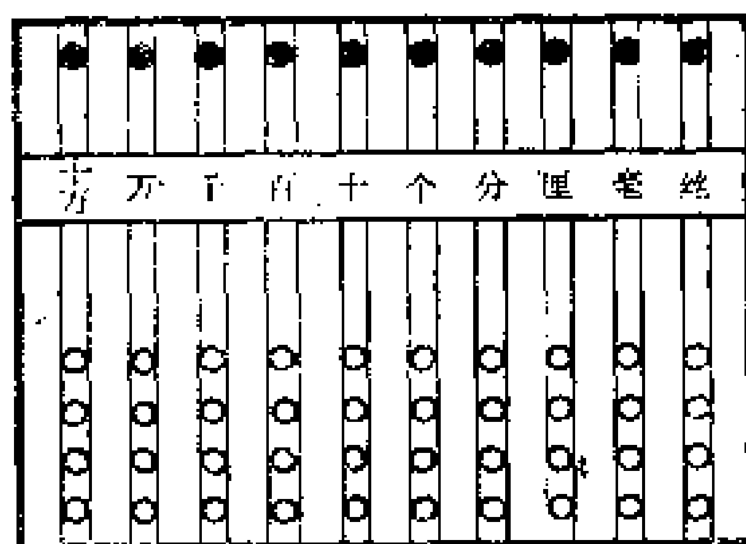
《数术记遗》卷首题"汉徐岳撰，北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注"。徐岳，东汉末时人，对数学进行过研究，有《九章算术注》二卷。《数术记遗》中佛教用语很多，因此，钱宝琮认为决不是徐岳的著作，而是甄鸾依托徐岳伪造的书。[②]是否如此，尚待研究。书中主要内容是大数进位和记数法。

《数术记遗》把古代的"隶首造数"说进一步演变成所谓"隶首注术，乃有多种"，"黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉"。所谓"十等"是指亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载十个大数名称。所谓"三等"是指大数三种进位制，即"下数者，十十变之，……；中数者，万万变之……；上数者，数穷则变，若言万万曰亿、亿亿曰兆，兆兆曰京也。"这些进位制都有循环的特性，由低一级进到高一级，只要变更一下特定的数名就可以通过循环达到进位的目的。

---

① 绖音叠，diè，古代丧帽丧带。
② 钱宝琮校点《算经十书·数术记遗提要》。

书中还有“积算”、“太乙”、“两仪”、“三才”、“五行”、“八卦”、“九宫”、“运筹”、“了知”、“成数”、“把头”、“龟算”、“珠算”和“计数”十四种算法。这些算法大都不见他书，虽然有简单说明，但其内容仍难确定。其中“珠算”一词第一次在这里出现，并解释说：“刻板为三分，其上下二分以停游珠，中间一分以定算位。位各五珠，上一珠与下四珠色别。其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一。”这种“珠算”应象图2—16所示那样，因为没说有挡，珠可能放在槽里。与后世的珠算有相似之处，但两者是否有关，还不清楚。



2—16　《数术记遗》中“珠算”推想图

第三节　南北朝末期到北宋初期的数学

通过刘徽、祖冲之等卓越数学家的辛勤工作，把我国的数学发展向前推进了一大步，在理论方面达到了很高的水平，形成特点。从南北朝末期到北宋初期，数学结合土木工程、经济问题和天文历法等实际需要有了新的发展。

土木工程中的数学

隋、唐时代的城市、宫殿、寺院和桥梁等土木工程都具有

很高的科学水平。土木工程和天文历法都需要运用数学解决一些较复杂的问题。出身于“闾阎”①间的数学家王孝通对当时土木工程中的数学进行了研究、总结，作出了重大的贡献。

1．**王孝通和他的《缉古算经》**。王孝通研究过《九章算术》和《缀术》等书，可是当他运用这些书中的数学知识去解决实际问题时，就觉得适应不了需要。他对《九章算术》中专讲与土木工程有关的“商功”提出了批评，指出：“伏寻《九章·商功篇》，有平地役功受袤之术。至于上宽下狭、前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹邪②之用。斯乃圆孔方柄，如何可安？”③说书中讲的和实际工程提出的问题就象要在圆孔中安装方柄一样，安不上。他还认为《缀术》虽然“精妙”，可是也存在一些不足之处，如“方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽”④，就是说，祖暅的《缀术》对于一些立体体积的处理有错，有的问题也未讲清道理。王孝通刻苦钻研数学，创立了新术，著有《缉古算经》一书，适应了当时的需要。王孝通还参加了唐初的历法改革工作，这项工作也需要大量数学知识。

《缉古算经》流传到现在（已残），成为我国珍贵的数学遗产。这部书共包括二十道题，大体可以分为四类：第一类是天文问题，只有一题；第二类是土木工程中的数学问题，有六题；第三类是地窖和仓库的容积问题，有七题；第四类是勾股问题，有六题。每道题都有答案和解题步骤，并有自注。

① 闾阎即小巷。
② 欹邪音七协，qī xié，歪斜的意思。
③ 王孝通：《上缉古算经表》。
④ 同上。

书前有一篇《上缉古算经表》,反映了王孝通的数学观点。他认为数学大有用处,“重句聊用测海,寸木可以量天”,是“司牧黔首”①的工具。他还把数学看作“其理幽而微,其形秘而约”的学问。意思是说理论深奥,形象也不明显。空间形式和数量关系,在他看来乃是一种“宇宙之至精”。这些就把数量关系神秘化了。王孝通认为《九章算术》来源于“周公制礼”,说什么“昔周公制礼,有九数之名。窃寻九数即‘九章’是也。”

王孝通对自己的数学著作很自信。他在《上缉古算经表》里说:“请访能算之人考论得失,如有排其一字,臣欲谢以千金。”确实,在《缉古算经》中很少发现错误,可见他治学严谨,态度认真。

他在书中所收的二十道数学问题大都较难,有的题答案就有27个之多,正如王孝通自己所说的:是“于平地之余,续狭斜之法”,特地找那些前人没有研究或未解决的实际问题加以探讨,获得重大成就。

《缉古算经》写成后,引起当时人们的极大注意和重视。公元656年,唐朝的国立学校——国子监内添设了数学科,搜集了唐以前的数学书《九章算术》等作为教科书,王孝通的《缉古算经》也在其中。直到宋代仍然把这本书作为必修教材。元丰间(公元1078—1085年),宋代出版《算经十书》,《缉古算经》也是其中之一。后来此书又传到日本等亚洲国家。

2．堤坝型体积的公式。王孝通《缉古算经》中的四类问题,以第二类最为重要。关于堤坝题讲了需要解决整个工程量

---

① 司牧黔首是统治平民百姓的意思。

的大小及各县分担任务的多少。这就需要根据已知条件求出体积，再计算其它所求答案。书中第三题比较典型，为了说明问题，不妨把它的意思写出来：

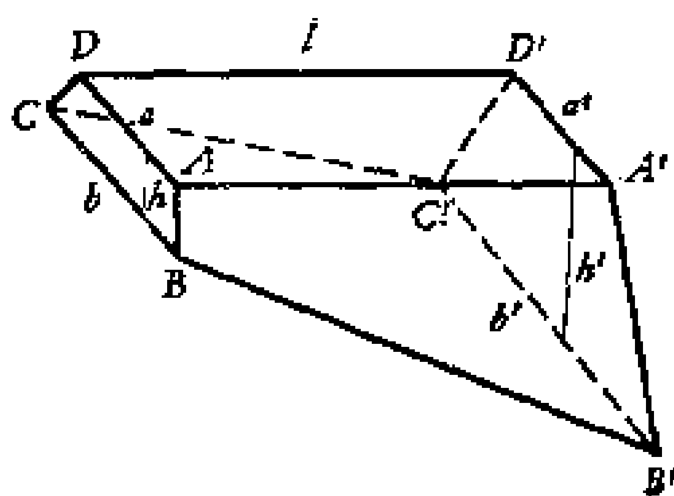
要修筑一堤，西头上、下宽之差$(b'-a')$为六丈八尺二寸。东头上、下宽之差$(b-a)$为六尺二寸，东头高西头高之差$(h-h')$为三丈一尺，上宽与东头高之差$(a-h)$四尺九寸，东西水平的长度与东头高之差$(l-h)$为四百七十六尺九寸。甲县六千七百二十四人，乙县一万六千六百七十七人，丙县一万九千四百四十八人，丁县一万二千七百八十一人。四个县每人每天挖土九石九斗二升、填土十一尺四寸又十三分寸之六。挖土一立方尺按八斗计算。在平地上每运土二斗四升八合、走一百九十二步，每天可运六十二次。现在是"隔山渡水取土"，其中平地只有十一步，山斜坡为三十步，水宽十二步。上山三步折合平地四步，下山是六步折合五步，过水是一步折合二步。以上四个数据要"十加一"算。还有"载输"十四步。假定每人作功都是一样的，四个县的人一齐动工，可一天完竣。现在工程的分配，从东头起依次为甲县、乙县、丙县、丁县。现在问：堤的斜高、东西长度、东西头的高度、两头的上下宽度、每人每天完成的工程量以及各县所分的长度、斜长、高、下宽各多少？

这个问题很复杂，现在来解也要费一些思索。可是在一千多年前的王孝通却把所有的答案求了出来。而且用现代数学来验证也都是正确的。王孝通在解法最后特别给出了堤的体积计算步骤（图2—17），即"置西头高(h')倍之，加东头高(h)，又并西头上、下广（宽）$(a'、b')$，半而乘之。又置东头高而倍之，加西头高，又并东头上、下广$(a，b)$，半而乘之。并

二头积$\left(\frac{a+b}{2}h,\ \frac{a'+b'}{2}h'\right)$，以正袤（$l$）乘之，六而一，得堤积（$V$）也。”稍加整理就得到下面的公式

$$V=\frac{l}{6}\left[\frac{a+b}{2}(2h+h')+\frac{a'+b'}{2}(2h'+h)\right]$$①

王孝通的计算步骤带有一般性。凡是那种有两个面平行的六面体的体积都可以用它求出来。但是，怎样求得法，《缉古算经》没有说明。这个公式是前所未有的。现在的土木工程，仍然可以用这公式计算体积。



2—17 堤坝示意图

3．三次方程。王孝通善于把几何问题通过代数方法去解决。《缉古算经》的二十个问题中有一大部分要化为一元二次方程，三次方程，或四次方程。其中三次方程是最主要的。书中的三次方程，大都能够化为$x^3+ax^2+bx=c$型。例如第三题求甲、乙、丙各县所分担的筑堤长度都归结为解此型三次方程。第二题也有一相当于$x^3+1620x^2+850500x=146802375$的三次方程，都是很典型的。

王孝通如何解这些三次方程，书中没有详细讲。只是先列出方程，说以c为“实”（常数项），b为“方法”（一次项系数），a为“廉法”（二次项系数）。就是把算筹按照一定的次序排列起来，然后进行运算，便是解方程。这与现代解法

① 沈康身：《王孝通开河筑堤题分析》，载《杭州大学学报》（自然科学版），第1卷第4期（1964），第43—58页。

的道理相似，王孝通叫做“开立方除之”，就是求出正根x。至于怎样“除之”，书中没加说明。

在王孝通以前，人们是否已经提出过三次方程，现在还是一个谜。《缀术》中的“开差立”，可能就是解三次方程。由于《缀术》早已失传，具体情况无法确知。因此，可以认为：王孝通的三次方程是目前流传下来的最早的三次方程。

外国人对三次方程的提出和研究都晚于王孝通。早在半个世纪前日本的三上义夫就说过：“唐王孝通之《缉古算经》，使用三次方程式以解各种问题。”“三次方程式，在阿拉伯算学上，乃甚显著之事，然中国成立三次方程式，乃在阿拉伯之前；而由术文推得之方程式解法，亦与发达于阿拉伯者全不同也。”①实际上，阿拉伯人到十世纪以后才有三次方程，十一、二世纪间中亚的学者奥马尔·海牙姆(Omar Khayyam，公元1048?—1122年)较系统地研究了三次方程的数值解法和几何作图法，②至于欧洲人就更晚了。可见，王孝通的三次方程研究是有世界意义的。

王孝通根据社会实践的需要，从事数学和天文学研究，取得很大成就。可是他对数学和天文学的某些认识是模糊和落后的，同时有一种固步自封的骄傲情绪，这在一定程度上限制了他的发展。他的《缉古算经》也不是完美无缺的。

---

① 三上义夫著、林科棠译：《中国算学之特色》，载《万有文库》本，第34页。
② M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Time, 1972, New York, pp. 193—195。

天文历法中的内插法

隋唐时期，我国的天文历法有很大发展，出现了《皇极历》、《大衍历》等优秀历法。为了更精确地计算历法问题，天文历法工作者应用了先进的二次内插法。

1．等间距二次内插法的应用。在古代，人们把太阳和月亮的视运行看作是匀速的，因此一年中二十四节气之间的时间间隔都是相等的。但事实上，太阳和月亮的视运行，并不匀速。早在东汉末年刘洪就已发现月行有快有慢，南北朝末期北齐的张子信通过长期观测又发现太阳也有类似现象，他指出："日行在春分后则迟，秋分后则速"，这现象基本上符合现代观测结果。原来认为太阳是匀速运动，计算就很简单，可是当已经发现视运动不匀速这一事实，要想精确计算太阳运行等问题就不能再用老方法，必须创造新的计算公式。正是在这种情况下，隋代卓越的天文学家刘焯在《周髀算经》中一次内插法的启发下，首先在天文历法研究中应用了等间距二次内插法公式。

刘焯（公元544—610年）勤奋好学，刻苦钻研。他"为学不倦，《九章算术》、《周髀》、七曜历书十余部，推步日月之经，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥，著《稽极》十卷、《历书》十卷行于世。"① 他在隋开皇二十年（公元600年）上《皇极历》，又曾提出在中原黄河南北的平地上进行大地测量的建议，以验证古代"寸差千里"② 的说法，都未实行。他

① 《北史·刘焯传》。
② 《隋书·天文志上》。

在《皇极历》中四处使用了等间距二次内插法公式。即（1）求两节气间某段日的迟速数；（2）“求月朔弦望应平会日所入迟速”；（3）“推朔弦望定日术”；（4）“求月入交去日道”。[1]现以第一个问题为例具体说明《皇极历》对内插法的应用。算法原文如下：

“推每日迟速数术：见求所在气陟[2]降率，并后气率，半之；以日限乘，而汛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残、汎总除，为总差。其总差，亦日限乘而汛总除，为别差。率：前少者以总差减末率为初率；前多者，即以总差加末率，皆为气初日陟降数。以别差〔半之〕前多者日减，前少者日加初数，得每日数。所历推定气日随算其数陟加降减其迟速，各为迟速数。”[3]

这段话是说：刘焯一方面把二十四气仍按等分，即取相等的二十四个时间间隔，但实际上每两气间的时间长度有短有长，与等分相比的差数就是“陟降率”，每一个节气和两节气间的某一日比按平均计算迟到或早到时间数叫做“迟速数”。这个问题是已知两气间的陟降率(Δ_1)以及后一气的气率(Δ_2)，求此两气间某日(n)的迟速数 $f(x)$。命 $f(a)$ 为该日前一气率的迟速数，则按上面的引文知刘焯的计算相当于公式

$$f(x)=f(a)+n\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+n(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{n^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

这就是刘焯等间距二次内插法公式。其余三处的计算步骤与此基本相同。

---

① 严敦杰：《中算家的招差术》，载《数学通报》，1955年1月号，第4—13页；李俨：《中算家的内插法研究》，1957，科学出版社，第24—35页。

② 陟音直，zhì，上升的意思，陟降就是升降。

③ 《隋书·律历志下》。

刘焯的算法对后来的历法研究有很大影响。十九年后唐傅仁均制《戊寅历》（公元 619 年）和六十多年后李淳风造《麟德历》（公元 664 年）都用到类似公式。特别是李淳风用的次数更多。他对刘焯的算法评价很高："微密至当，以示算理通涂（途）"。刘焯的算法确实是数学发展史上的一项重要成就。在外国，印度的婆罗门笈多（Brahmagupta）于 628 年用等间距内插法公式计算正弦值①；阿富汗著名科学家阿尔·毕鲁尼（公元 973—1048 年）在计算正弦值和正切值时也用了等间距二次内插法公式②，都晚于刘焯。

2．不等间距二次内插法的应用及其它。刘焯的算法虽然是一项重大成就，但是仍有局限性。因为他所取的间距还是相等的。实际上，二十四节气的安排应当使用不等间距的内插法才更合适。此项工作由张遂完成。



张　遂

张遂（法名一行，公元683—727年）唐代著名天文学家，领导了有名的天文大地测量，又和梁令瓒共同创造了"黄道游仪"和"水运浑仪"等大型天文仪器，还编订了《大衍历》等书。他根据大量观测资料，在刘焯等前人的基础上首先提出了定气的概念，按不等的时间间隔安排二十四节气，把刘

① Prabadh Chandra Sengupta 译，The Khandakhadyaka, an Astranomical Treatise of Brahmagupta, 1934, Uni. of Calcutta, P. 142

② Б. А. Розенфельд, Попытка квадратичного интерполирования у Абу-р-рейхана ал-Бируни, Историко~Маматическис исследования выпуск Ⅺ, 1959. стр421—430。

焯的公式由等间距推广到了不等间距的情形，建立了不等间距二次内插法公式。张遂计算太阳视运行速度的步骤原文如下：

"〔步日躔术〕以所入气，并后气盈缩分(Δ_1,Δ_2)，倍六爻(s)乘之，综两气辰数(w_1,w_2)除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差。至①后以差加末率，分②后以差减末率，为初率。倍气差亦倍六爻乘之，复综两气辰数除〔之〕为日差，半之，以加减初、末〔率〕各为定率。以日差，至后以减，分后以加，气初定率，为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日(a)加减气下先后数，各其日定数($f(a+s)$)。"③

把这段话所述的内容改成现代数学符号，并稍加整理，便得到在距某入气日 a 前后 s 日的太阳视运行速度的计算公式：

$$f(a+s)=f(a)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{w_1+w_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{w_1}-\frac{\Delta_2}{w_2}\right)$$
$$-\frac{s^2}{w_1+w_2}\left(\frac{\Delta_1}{w_1}-\frac{\Delta_2}{w_2}\right)$$

这就是数学史上有名的"张遂内插法公式"的现代形式。它和刘焯公式的主要不同之点是间距不同，即公式中的 $w_1\neq w_2$，当 $w_1=w_2=1$ 时即得刘焯公式。

此外，张遂在《大衍历》中第一次把"齐同术"用于历法计算上。另外，在已知日数 n 和某行星在第一日内的速度 a、每日速度差 d，张遂用相当于下面的公式

$$s=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)$$

---

① "至"：冬至、夏至。
② "分"：春分、秋分。
③ 《新唐书·历志四上》。

计算n日内此行星所行的度数①。这是一个已知首项、公差和项数的等差级数求和公式。如果已知s、a、d，那么《大衍历》还有一个相当于下面求n的公式

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a-d}{d}\right)^2+\frac{8s}{d}}-\frac{2a-d}{d}\right],$$

这显然是二次方程 $n^2+\frac{2a-d}{d}n=\frac{2s}{d}$的正根②。

唐代后期的徐昂，在所制《宣明历》中计算太阳、月亮视运行速度时，“皆因《大衍历》旧术”，就是用张遂的不等间距二次内插法计算的。

运筹应用事例

唐宋时期，在军事上、生产上经常运用属于现代对策论（博弈论）、规划论、统筹方法等原始运筹思想方法。

1．在军事方面的运筹事例。军事方面运用筹划的事例很多。北宋成书的《武经总要》（公元1044年）中记载着从春秋战国到北宋初的上百个例子③，有着丰富的运筹学原始素材。

在其它书上也有许多与军事有关的运筹事例。最有名的是沈括的行军运粮问题。沈括（公元1030—1094年）曾带兵打过仗，认识到军粮是个大问题，军队自己运粮不仅负担太重，而且难于行远。最好的办法是从敌人手中夺取。为什么这样做？他有如下的计算：

---

① 《旧唐书·历志三》。

② 钱宝琮：《中国数学史话》，1957，中国青年出版社，第133—134页。

③ （宋）曾公亮等：《武经总要后集》卷一～十五。

由于作战的士兵本身都带着武器装备，不可能多带粮食，只有抽调大批民夫运粮。假定每个民夫背六斗①粮食，士兵自带五天的干粮，每人每天吃二升，一个民夫供应一个士兵，两个人可单程进军十八天。如果把回程计在内，则只能进军九天。如果两名民夫供应一个士兵，两人共背一石二斗，三人同吃，每天六升，到第八天遣返一名民夫，给他六天的粮食，此后两人同吃。和上面的算法一样，单程可进军十八天（包括士兵自带的五天干粮在内），总共可进军二十六天。有回程则只能进军十三天。如果三名民夫供应一个士兵，三人共背一石八斗，前四天半四个人同吃，每天八升，遣返第一名民夫，给他四天粮食。以后三人同吃，每天六升，到第八天遣返第二名民夫，给他九天的粮食，余下的两个人可吃十八天。这样可单程进军三十一天，有回程时则只能进军十六天。沈括算到这里便大吃一惊，他看到三名民夫供应一个士兵已经达到顶点了，如果出兵十万，其中还有约三分之一的兵员押送辎重，能作战的只有不到七万人。这就至少需要动员三十万民夫运粮，不能再增加这个比例了。可是事情还要复杂得多，民夫每人背六斗是按平均数计算的。此外，队长不自带干粮，炊事员所带减半，再加上死亡、生病等情况，民夫的负担还要加重，常不止六斗。如果用畜力驮运，每匹骆驼驮三石，骡、马驮一石五斗，驴驮一石，与人背相比驮的多花费也少，可是一旦草料供应不及时，牲口就要消瘦或死去。牲口一死，所驮的粮食只好全部扔掉。因此，沈括得出结论：用牲口驮运与用人力背送，利害相当，没有显著的优点。他在这里用运筹学思想，解决行军运

---

① 宋斗比现代斗小得多。

粮问题，自运不合适，最好的办法是想法从对方夺取。①

2．在经济和运输方面的运筹事例。唐代中期，有个理财家刘晏（公元715—780年）在这方面有突出的成就。他生活在“安史之乱”后，当时全国经济遭到很大的破坏，必须设法恢复经济，增加国库收入。刘晏想了很多办法，能在“人无厌苦”，“人不加赋”的情况下，使国家财政收入大量增加②。他在许多具体事务的处理上，表现有明显的运筹思想，现举几例：

当时京师长安一带（即关中地区），遭受破坏最严重。到公元767年，“中外艰食，关中米斗千钱”，粮价昂贵。造成这一情况的主要原因是由于汴水湮废。以前都是通过汴水把东南方的粮食运进长安，而现在只好“由长江、汉水抵汉中，遇险劳费”。刘晏经过分析，对比了各种方案，认为当时的运输方案不好，因而决定“疏浚汴水”，结果是“每岁运米数十万石以给关中”③，节省了大量的物力和人力。

刘晏解决物资调运问题时，根据不同情况采取不同决策和多级决策的方法。当时通过长江、黄河、汴水和渭水向长安调运物资，各河道水流缓急不同，特别是黄河水流湍急，从其它河流进入黄河的船只多不适应，往往覆舟。刘晏根据这种情况，采取了分别造船，沿水建立粮仓，分阶段运输，结果效果很好。每年运输量大为增加，有时达到一百多万石，而且不再出现覆舟的现象④。

3．在工程方面的运筹事例。这方面的例子很多，下面仅

---

① 沈括：《梦溪笔谈》卷十一。
② 《旧唐书·刘晏传》。
③ 司马光：《资治通鉴》卷二十七、二百二十三、二百二十六。
④ 《旧唐书·刘晏传》。

举几个。

北宋真宗大中祥符八年（公元1015年），京城开封的皇宫失了大火，建筑物被烧毁。宋真宗命丁谓主持修复工程。这种工程比完全新建要复杂得多，既要拆除烧毁的建筑物，又要清理废墟。如果没有合理的施工方案，不仅拖延工时，而且还要造成巨大的浪费。丁谓经过分析研究，提出这样一种办法：把皇宫前的大街挖成一条大沟，利用挖出来的土作为建筑材料，就不必从远处运土了。同时再把汴水引入这条大沟。从外地来的船只、木筏等载着各种建筑材料可以直抵建筑工地。竣工之后，再把那些废弃的碎砖烂瓦和大量的垃圾全部填进沟中，修复原来的大街。这样，可以“一举而三役济”，是一个最优的施工方案，结果节省的费用“以亿万计”①。

北宋仁宗庆历八年（公元1048年），黄河在河南商胡决口，如何堵塞，工程非常艰巨。当时堵塞决口的方法是把“埽”②从决口两侧逐渐向中间放置。放中间的最后一埽最为关键，也是最难的一步，称为“合龙门”。这次决口，屡塞不合，合龙门的埽多被冲走。“水工”高超建议把大型埽分为三节，中间用绳索连接。先下第一节，使它下到水底；水流虽未断绝，但水势已减半，下第二节时就省力很多，下第三节就等于平地施工。最后根据这建议进行施工，得到成功。这个施工方案大大优于旧方案。它不仅能加快塞决的速度，而且可以节省大量物资和人力。③

---

① 《梦溪补笔谈》卷二。

② 埽音扫，sào，与扫同。这里是指用苇草、木枝夹上土石捆成巨大的捆子。

③ 《梦溪笔谈》第十一卷。

还有其它一些事例①，这里不再列举。

唐宋时期数学教育与中外交流

1. 国家数学教育。我国数学教育有悠久的历史，早在周代的"六艺"②教育中就包括数学教育。到隋代，在最高学府——国子寺中设有算学博士二人，算助教③二人，从事数学教学工作，有学生八十人④。这是我国有专门数学教育的开始。

唐朝建立后，在隋的基础上继续举办数学教育，把数学作为一个专科，与明经、进士、秀才、明法、明书并列为六科。数学科当时叫做明算科⑤。唐朝也设有算学博士二人，"掌教文武官八品以下，及庶人⑥子之为生者"⑦还有算助教一人。算学博士的官秩很低，只有从九品下，而算助教则没有品级⑧。

唐初为了教学的需要，由科学家李淳风等人共同审定并注释了十部数学书，作为明算科的教科书。根据一些古书的记载，有《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》等九部，还有一部，可能是《夏侯阳算经》。

---

① 李迪：《我国古代运用筹划的几个事例》，载《数学的实践与认识》，1977年第4期，第85—88页。
② "六艺"指礼、乐、射、御、书、数。
③ 算博士、算助教是教数学的教师。
④ 《隋书·百官志》。
⑤ 《新唐书·选举志》。
⑥ 庶人是百姓的意思。
⑦ 《唐六典》卷二十一。
⑧ 《新唐书·百官志》。

唐代的明算科分两组学习。每组十五人，第一组学《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《夏侯阳算经》和《周髀算经》。限六年学完。每种书学习多长时间也都有明确规定，比如《九章算术》和《海岛算经》合起来学习三年，等等。第二组学《缀术》和《缉古算经》，前者学四年，后者学三年①，共学七年。同时这组还兼学《数术记遗》、《三等数》②两书。《缀术》是两组中学习年限最长的书。

考试也分组进行。在第一组中，除《九章算术》出题三条外，其余都各出一条；在第二组中，《缀术》出题六条（或七条），《缉古算经》出题四条（或三条）。考试的要求是“明数造术，详明术理，然后为通”。每组各十条，规定有六条通过就算合格，还要附加《数术记遗》和《三等数》两书。“读令精熟”，考试时也要参考，“十得九”才算通过。③明算科毕业考试通过的人员要交吏部录用。④

数学教育在唐代是不稳定的，可以说兴废无常。唐初，人员较多，有时各科共有学生八千多人，校舍一千二百间。光是书、算等科最多时就有教师、学生三千二百六十员。⑤ 可以看出，当时教育的盛况。但是到唐代中后期，有时算学只有十个人，甚至完全停办。

五代时，由于战争不断，数学教育便无从谈起。北宋初期

① 《唐六典》卷二十一；《新唐书·职官志》。
② 《三等数》一书早已失传，内容不详，估计可能是一本专讲三种大数进位制的算术书。
③④ 《唐六典》卷二；《新唐书·选举志》。
⑤ 《唐会要》卷三十五。

虽设有“算学博士”，但并未兴办数学教育。直到元丰七年（公元1084年）才有算学考试之举。崇宁三年（公元1104年），才正式建立算学科。可是不久废止，后又复置。当时有算学博士及办事人员十二人，学生二百六十人。教科书仍然是唐代的那套“算经”①。元丰七年有刊本，因《缀术》已经失传，没有包括在内。

2. 中国数学的外传。隋唐时期，中外贸易和文化交流都盛于前代。中国数学的早期外传，主要是传到朝鲜和日本。中朝两国是山水相连的近邻，中国数学随时都能输入朝鲜，同时又从朝鲜传入日本。因此，朝、日两国的数学颇受中国影响，他们的数学教育制度和教科书也基本上是采用中国的。

六世纪时，由个别佛教僧侣把中国算术原文从朝鲜带到日本。②又有记载说公元554年，有朝鲜易博士③王良道、王保孙，始以中国历法传入日本④。可见，至迟在六世纪时，中国的算术和历法已在朝鲜流传。如前所述，中国历法中有高深的数学计算，通过历法的交流也是向朝鲜、日本传播数学的一种重要途径。在朝鲜的三国时代（相当于中国的唐代），受中国数学的影响相当明显。当时朝鲜有关田地、农作、租税、谷物交换、运输等方面的计算法可能都是来自《九章算术》⑤。在朝鲜古代的建筑中使用了中国的两个圆周率值$\frac{22}{7}$和3.14，还有《九

① 宋刊本《数术记遗》后面多“算学源流”一篇。
② J.E. Hofman 著，H. O. Midonick译，Classical Mathematics，1959 New York，P. 112.
③ “易博士”就是讲解《易经》的专门人员。
④ 《日本书纪》卷十九，据《国史大系》（日本），第一册，第336页。
⑤ 金容云、金容局：《韩国数学史》，1978，日本槙书店，第49—60页。

章算术》中的二次方程和《缉古算经》中的三次方程等。①

朝鲜于公元717年设置医博士、算博士各一人。同时期或稍后，在国立学校中"差算学博士若助教一人，以《缀经》、《三开》、《九章》、《六章》教授之"。②其中《缀经》可能是我国的《缀术》，《九章》即《九章算术》，《三开》和《六章》两书在我国不见记载。到朝鲜李朝仁宗十四年（公元1136年）时，所用教科书稍有变化。当时考试分两天进行，"凡明算式贴经，初日贴《九章》十条，翌日贴《缀经》四条，《三开》三条，《谢家》三条"，两天全通为合格③。这里由《谢家》代替了《六章》。大约在唐宋之间，我国有一部《谢察微算经》三卷，现已失传，朝鲜所用的《谢家》当即此书。

中国数学六世纪传入日本后，逐渐被日本所熟悉，所研习。日本于公元702年开始建立学校，包括数学科。所用教科书为《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《缀术》、《周髀》、《六章》、《三开》、《重差》和《九司》④。很显然，前六种就是我国的《九章算术》、《孙子算经》等的简称。《九司》在我国也不见记载。《六章》、《三开》两书也见于朝鲜，很可能同出一源。《重差》一书，可能是《海岛算经》。在日本又有《海岛》，不知与《重差》是否一书？《隋书·经籍志》有《九章重差图》也不知与日本的《重差》是否同为一书？日

① 洪以燮：《朝鲜科学史》，1944，东京，第111—112页。
② 金富轼：《三国史记》卷三十八"杂表第七·职官上"。
③ 郑麟趾等：《高丽史》卷七十二"选举一"；（朝鲜）《增补文献备考》卷一百八十八"选举考"。
④ 李俨：《中算输入日本的经过》，《中算史论丛》第五集，1955，科学出版社，第168—186页。

本的考试方法和分组学习等，都和我国相似。

在九世纪日本的书目中又有了《夏侯阳算经》、《张邱建〔算经〕》、《五经算〔术〕》、《数术〔记遗〕》、《婆罗门阴阳历算》、《元嘉算术》等①。可见当时我国的数学书绝大部分都传到日本。只有王孝通的《缉古算经》不见传入的记载。

唐代中日来往较多。日本经常派遣留学僧到我国来学习，最有名的如吉备朝臣于公元717年来我国留学，一直住了十六年。回国时带去了《大衍历经》一卷、《大衍历立成》十二卷、测影铁尺一枚、铜律管一部等②。这样，《大衍历》中的内插法，自然也就传到日本。使用内插法的《麟德历》和《宣明历》也被日本采用。日本使用《宣明历》的时间很长，达八九百年之久③。因此，内插法是日本历法家所熟悉的。

唐宋期间中国数学对印度等国家也有影响。早已有人认为印度的几何学"来自希腊和中国"，例如印度数学家巴斯卡拉（Bhaskara）于公元1150年对勾股定理的证明，和赵君卿证法完全一致。可能是根据中国早先给出的证明④来证的。印度还有"折树着地"问题、"莲花"问题⑤，和我国《九章算术》勾股章的"折竹着地"、"葭生中央"问题，除个别数字不同外，几乎完全相同。显然是受了《九章算术》的影响。

---

① 藤原佐世：《日本国见在书目》，（中国）《古逸丛书》收入此书。

② 《续日本纪》，（日本）《国史大系》第二册，第197—198页。

③ 山本一清：《日本天文学史》，1937，厚生阁·恒星社《图说天文讲座》第八卷，第13—14页。

④ F. Cajori: A History of Elementary mathematics, 1917, N. Y. P.123.

⑤ В. Д. Чистяков Материалы по истории математики в Китае и Индии, 1960, стр. 142—145。

印度古代数学中关于球体体积的公式就是《九章算术》中的 $\frac{16}{9}D^3$①，决非偶然。七世纪时的印度数学家婆罗门笈多和前面提到的巴斯卡拉在自己的书中都提到了和"孙子定理"相类似的问题②。

苏联的哥尔门果洛夫曾经指出："中国数学和希腊、罗马、印度、中亚细亚和中世（欧洲）的关系还很少研究。但是这种关系是存在着的：不少国家的数学手稿上，算题的数据恰恰与中国的原著相同。"③在意大利梁纳多（Leonardo of Pisa)的《算盘书》（*Liber abaci*,1202）上重现了"孙子定理"④，在阿拉伯文的算书和后来欧洲的数学文献中都有和"孙子定理"相类似的问题⑤。

此外，中国的"盈不足术"、比例算法、"百鸡术"等，也都在这个时期传到阿拉伯或欧洲。

3．外国数学传入我国。数学和其它文化科学一样，影响和交流都是相互的，特别是印度的数学传进我国最早。印度大数、小数记法早随佛教经典于晋以后传进我国⑥。隋代则传进我国一批天文数学书，见于记载的有《婆罗门天文经》二十一卷、《天文说》三十卷、《婆罗门天文》一卷、《婆罗门算法》

---

① В. Д. Чистяков: материалы по истории математики в Китае индии, 1960 стр. 142—145。

② L. E. Dickson:History of the theory of numbers Vol. Ⅱ,1952, Chicago,PP. 58—59。

③ Большая советская энциклопедия, 1954, Том. 26, стр. 469。

④ В. Д. Чистяков материалы по истории математики в Китае и индии, 1960, стр.103。

⑤ G. Lolia, Storia delle matematiche, 1950, Milano, P. 153—154。

⑥ 李俨:《中国古代数学史料》,1954,中国科学图书仪器公司,第158—169页。

三卷、《婆罗门阴阳算历》一卷、《婆罗门算经》三卷①。这些书当时大概都没有翻译，后来全部失传。

唐开元六年（公元718年），我国天文学家瞿昙悉达奉唐玄宗之命将《九执历》翻译为中文，又编写了《开元占经》一百一十卷。《九执历》即载于此书的卷一百零四。其中关于数学内容有印度数码和三角函数表两项。

印度数码即现在通行的阿拉伯数码的前身，于中世纪传入阿拉伯，再传入欧洲，流行于全世界。由九个符号表示九个单个数目，遇空位时用一点或一个圆圈顶位。遗憾的是，译者没有把这些字写出，在书上只是打九个方框，如下：

一字	二字	三字	四字	五字	六字	七字	八字	九字
□	□	□	□	□	□	□	□	□

书中接着写道："右天竺（即印度）算法，用上件九个字乘除，其字皆一举札而成，凡数至十，进入前位，每空位处，恒安一点。有间咸记，无由辄错，连算便眼"②。这是讲用九个数码进行笔算；同时指出了缺点。由于我国有固有的筹算，因此没有接受印度的笔算。

《九执历》中有由$3°45'$到$86°15'$每隔$3°30'$的正弦表，包括$90°$角的正弦值在内共有24个值。数值都用分数表示，分母均为3438，例如$3°45'$的正弦值为$\frac{225}{3438}$（$=0.06544$），$67°30'$的正弦值为$\frac{3177}{3438}$（$=0.92408$），$86°15'$的正弦值为$\frac{3431}{3438}$（$=0.99796$）。这里的公分母3438是圆的半径r，其计算是把全圆周分为$360°$，每$1°$分为$60'$，于是

① 《隋书·经籍志》。

② 《开元占经》卷一百四。

$$2\pi r = 360 \times 60 \qquad (\pi = 3.1416)$$

或
$$r = \frac{360 \times 60}{2\pi} = 3438$$

那些分子的头一个225是由$\frac{90^{\circ}}{24} = 3^{\circ}45'$而来，即$3^{\circ}45' = 225'$。以下是由225开始通过等间距二次内插法算得。

第四节　传统数学发展的高峰

如上所述，从南北朝末期到北宋初期，约五百年，我国积累了丰富的数学素材，到北宋中期至南宋末期，数学伴随着整个生产技术和其它科学的发展而形成了高峰，特别是在代数方面取得了一系列世界第一流的成果。

两宋时期数学发展的概况

1．两宋形成数学发展高峰的原因。

国内商业与海外贸易的大发展是数学发展的新因素。北宋政权建立后，商业贸易比唐代有了更大的发展。这时，大城市迅速增加，全国十万户以上的城市有四十多座，几乎是唐代的两倍。海外贸易也特别发达，泉州、广州、明州（今浙江宁波市）、温州、杭州等都成为重要的对外贸易港口。当时出口的物资主要是丝织品、陶瓷、铁器、漆器等，进口的主要是香料、药物、"宝物"、布匹等，种类很多。宋政府沿袭唐代的制度，设置了专门管理海外贸易的机构——市舶司，首先制订了

统一的法令，又实行“抽分”①的贸易税。这就向数学提出了新的课题。

宋代（特别是北宋）的土木工程和水利工程较多，在建筑和治水中，人们要求提高技术水平，推广先进经验，宫殿建筑或其它建筑逐渐形成规格化，完成了《木经》、《营造法式》、《河防通议》等有关建筑和水利的专门著作。这些书中都有许多计算问题，对数学提出了一些新的要求。在宋代数学著作中，除继续有同前代类似的土木工程问题之外，还有其它各种新问题。

宋代各门科学普遍发展，达到较高的水平。如提出世界上最早的火药配方，指南针的发明与应用，发明了活字印刷术，沈括完成了在科学史上有重要地位的《梦溪笔谈》，制成了闻名于世的机械计时器和天文仪器，在生物学、医药学、地学、机械等方面都有成就。

宋代在学术上有更多的自由，虽然当时有所谓“道学”，但是并未发展到统治地位。总之，宋代学术研究的气氛较浓厚。数学在这种有利的环境下，与其它学科竞相发展，是必然的。

数学家的出现也是宋代数学发展的不可忽视的原因。由一些数学家开辟的方向往往要影响很长一段历史时期。北宋的刘益、贾宪、沈括，南宋的秦九韶、杨辉等数学家的工作，不仅把宋代的数学推向高峰，而且对元代数学的发展也有深远影响。

2．大量数学著作的出现。隋唐时代的数学著作不过一、

① 抽分是指从全部货物中抽取若干分的意思。计算时是把总数分为十分。

二种，但是在宋代前后不到三百年却写出了五十多种，平均每五、六年一种，其中有些著作水平极高。现据《宋史·艺文志》（i）、《崇文总目》（ii）、《直斋书录题解》（iii）、程大位《算法统宗》（iv）以及其它书中的记载列举书目如下：

（1）李绍穀《求一指蒙算术玄要》一卷（（i））。

（2）夏翰《新重演议海岛算经》一卷（（i））。

（3）徐仁美《增成玄一算经》三卷（（i）、（ii））。

（4）李籍《九章算术音义》一卷（（i））。

（5）李籍《周髀算经音义》一卷（（i））。

（6）任弘济《一位算法问答》一卷（（i）、（ii））。

（7）杨锴明《明微算法》一卷（（i），（ii）作三卷）。

（8）《算法口诀》一卷（（i），（ii）作《算法口诀》一卷）。

（9）《算法秘诀》一卷。（（i）、（ii））。

（10）《算术玄要》一卷（（i）、（ii））。

（11）《五曹乘除见一捷例算法》一卷（（i），（ii）捷作切）。

（12）《求一算法》一卷（（i），（ii）作三卷）。

（13）《解注零歌》一卷（（i））。

（14）《算法》二卷（《南痈志》卷十八）。

（15）《求一算经》一卷（《郡斋读书志》）。

（16）《应时算法》一卷。

（17）《算法序说》一卷。

（18）《乘除算例》一卷。

（19）《里田要例算法》一卷。

（以上四种均见《秘书省续编到四库书目》）

(20) 中山子《算学通元九章》一卷。

(21) 《乘除算术》一卷(可能与18同为一书)。

(22) 《量田要例算法》一卷(可能与19同为一书)。

(以上三种均见郑樵《通志略》)

(23) 《方圆算经》。

(24) 《方圆益古算经》。

(25) 《曹唐算经》((iv)中有《曹唐算法》可能同为一书)。

(26) 《法算细历》。

(以上四种均见(宋)尤袤《遂初堂书目》)。

(27) 贾宪《黄帝九章细草》九卷((i),(iv)作贾宪《九章》)。

(28) 蒋舜元《应用算法》一卷((iii),(iv)无卷数及作者)。

(29) 《议古根源》(刘益,又见杨辉《算法通变本末》)。

(30) 《益古算法》。

(31) 《算法机要赋》((i)、(ii))。

(32) 《证古算法》。

(33) 《明古算法》。

(34) 《辨古算法》。

(35) 《明源算法》。

(36) 《金科算法》。

(37) 《指南算法》(又见杨辉《算法通变本末》)。

(38) 《通微集》。

(39) 《通机集》。

(40) 《盘珠集》。

(41) 《走盘集》。

（42）《三元化零歌》（在（i）中有张祚注《算法三元化零歌》一卷，可能同为一书）。

（43）《钤经》（祖颐《四元玉鉴后序》说鹿泉石道信著《钤经》）。

（44）《钤释》。

（以上15种均见（iv））。

（45）韩公廉《九章钩股验测浑天书》一卷（苏颂《新仪象法要》卷上）。

（46）贾宪《算法斅古集》二卷（王洙《王氏谈录》）。

（47）秦九韶《数术大略》十八卷（今称《数书九章》）。

（48）杨辉《详解九章算法附纂类》十二卷。

（49）杨辉《日用算法》二卷。

（50）杨辉《乘除通变本末》三卷，每卷各有名称：上卷《算法通变本末》，中卷《乘除通变算宝》，下卷《法算取用本末》（此卷与史仲荣合著）。

（51）杨辉《续古摘奇算法》二卷。

（52）杨辉《田亩比类乘除捷法》二卷。

上列（50）—（52），三种七卷，一般称为《杨辉算书》，均作于1274—1275年间。

（53）《诸家算法》（李俨有钞本）。

（54）贾宪《释锁》。

以上是目前所知宋代的数学著作，不论是数量还是质量都远远胜过前代。但其中除4、5、47、48、50—52外，均已失传。

此外还有稍早一点的几种数学作品，即敦煌千佛洞所藏的《算书》（现藏巴黎）、《算表》（作于952年，现藏巴黎）、《算经》三种（均有序，均残，一种现藏巴黎，两种现藏伦敦）、

《立成算经》一卷（现藏伦敦），国内有影摄本①。这儿种书的内容都比较浅显，多系算术问题，包括地亩计算、乘法口诀、度量衡单位换算等。

3．数学发展的特点。从北宋到元代前期，我国的数学发展达到了高峰，在世界数学史上也大放异彩。如果说由赵君卿、刘徽开始到王孝通的三四百年间，几何得到高度发展，大体上形成了以几何为中心的时期，而宋元时的高峰则基本是以代数为中心的时期。当时关于高次方程的近似解法、多元一次方程组解法、高阶等差级数、组合数学、半符号式记法，还有属于数论的同余式组的解法等等，都达到了当时世界最高水平。当然在几何或其它方面也有一些新的成就，但都不如代数水平高。

从数学思想和地区来看似乎是这样：北宋时期的数学在全国大体上形成一体，有些新的思想如天元术（半符号式代数）等已经萌发于太行山一带。到南宋和金对峙时朝，由于南北文化交流有所减少，因此形成了不同的特点。天元术在北方得到很大发展，而在南方简算法、方程解法和同余理论发展很快。到元代统一全国时，南北两方的数学汇合在一起，再加上当时一些其它新因素，我国数学再次出现高潮。

数字方程解法的成就

北宋时期在数学方面的一项突出成就，是杰出的数学家贾宪和刘益建立了数字方程的近似解法。

1．贾宪和刘益的生平。贾宪是十一世纪前期著名天文学

---

① 李俨：《中国古代数学史料》，1954，第22—39页。

家楚衍的学生，楚衍对于古代数学著作如《九章算术》、《海岛算经》、《缀术》、《缉古算经》等"尤得其妙"，并长期在国家的天文台工作。他有两名弟子，一名叫朱吉，后来担任太史，也在天文台工作；另一名就是贾宪，在朝廷里做左班殿直（低级武官）。贾宪对数学进行了深入研究，"运算亦妙，有书传于世"①。现在所知道的，贾宪有三部数学书，即《算法斆古集》、《黄帝九章细草》和《释锁》，可惜都已失传。上述第二种既以"九章"为名，估计很可能和《九章算术》差不多，应按问题的性质分为"方田"、"粟米"等九部分，每部分为一卷。大概是对于每一问题的解法进行了详细演算，写成"细草"加在书上。但是贾宪的"细草"并不是一般的演草、而是带有创造性的成果。这本书的部分内容在南宋杨辉的著作中被引用，得以保存到现在。

刘益的生活年代很难确定。杨辉说他是中山（今河北省定县）人。有人据政和三年（公元1113年）定州升为中山府，即认为刘益大概是1113年以后的人。②这种说法不一定可靠，实际可能与贾宪同时，甚至稍早。③

在贾宪和刘益的时代，数学已经积累了不少有关方程的问题和开方问题。上节所讲的王孝通的三次方程就是典型例子。贾宪和刘益各自把这类问题进行了搜集和整理，在前人的基础上取得了新的成就。

---

① 王洙：《王氏谈录》。

② 钱宝琮：《增乘开方法的历史发展》，载《科学史集刊》，第2期（1959），第126—143页。

③ 李迪：《简评〈中国数学史〉》，载《科学通报》，1965年11月号，第994—998页。

2. 贾宪的"增乘开方法"。贾宪对数学的首要贡献是建立了一种开高次方的新方法——"增乘开方法"。在杨辉《详解九章算法》所附的"纂类"中，录有"贾宪立成释锁平方法"、"增乘开平方法"和"贾宪立成释锁立方法"、"增乘开立方法"，同时还详细抄录了解法步骤。因此可以确切地知道贾宪的两种开方法——"立成释锁开方法"和"增乘开方法"的具体内容。"立成释锁开方法"本质上和《九章算术》中的开方法相同，"增乘开方法"较简捷，有创造性。古代开方实际上相当于求二项方程 $x^n - A = 0$ 的一个正根，其中 A 叫做"实"，x^n 的系数"1"叫做"下法"(有时也叫"隅")，相当于《九章算术》中的"借算"。开方过程中把 $x^n - A = 0$ 变为一般 n 次方程。贾宪把新方程一次项系数叫做"方"，有时也叫"廉"，一般地说 n 次项和一次项之间各项的系数都叫"廉"。在贾宪的方程中只有二次的和三次的，因此算筹分别摆成实、方、下法三层和实、方、廉、下法四层。

增乘开方法的特点是：议得每位商之后，先以商乘下法，再"入方"，即把乘得的积加入"方"内。这样，每议得一位商数，就要乘一次加一次，随乘随加。贾宪说："以商乘下法，递增乘之。"这就是"增乘开方法"一词的由来。每求得一位商数，实际上要进行一次代换，再求下一位商数时，前面的商数就暂时不管了。下面以 $x^2 = 71824$ 或 $x^2 - 71824 = 0$ 为例说明"增乘开方法"的具体步骤（以阿拉伯数码代筹式）：

	商
71824	实
	方
1	下法

(1)

未开方前的原式。

2	商
31824	实
4	方
1	下法

（2）

将下法“1”移至7下，上商议得2。以商2乘下法为“平方”，再以商2乘平方与实相减得31824。又以商2乘下法入平方。（2）

2	商
31824	实
4	廉
1	下法

（3）

将方“4”向右移一位为廉，下法向右移两位。（3）

26	商
4224	实
52	廉
1	下法

（4）

议得第二位商为6，以商6乘下法，为隅，入廉得4600，再以6乘廉得27600，与实相减得4224。又以商6乘下法入廉得“52”。（4）

26	商
4224	实
52	廉
1	下法

（5）

将廉向右移一位，下法向右移二位。（5）

268	商
	实
528	廉
1	下法

（6）

议得第三位商为8，以商8乘下法为隅，入廉得528，再以8乘廉得4224，与实相减恰尽。（6）

这个步骤，如以现代形式来解释，就是：首先进行线性变换：$x=100x_1$，则原方程变为

$$10000x_1^2-71824=0$$

第一位商数在2、3之间，上商2（实为200），进行代换$x_2=10(x_1-2)$，有

$$100x_2^2+4000x_2-31824=0$$

又议得第二位商数在6、7之间，上商6（实为60），进行代换$x_3=10(x_2-6)$，有

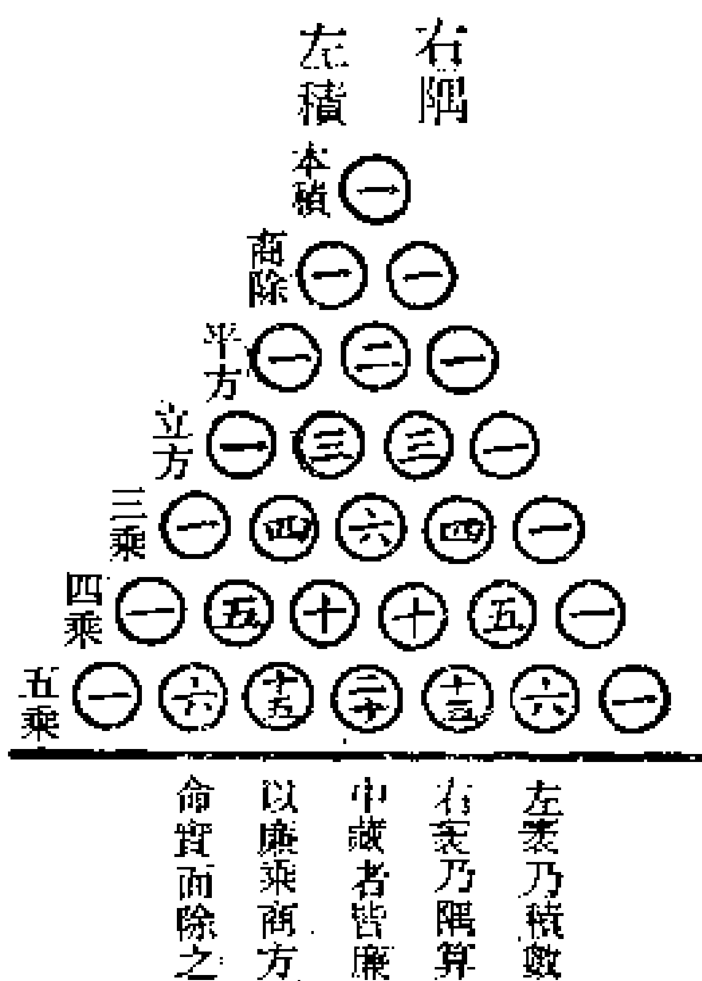
$$x_3^2+520x+4224=0$$

又议得第三位商数在8、9之间，上商8，恰尽，故有

$$x=2\times100+6\times10+8=268$$

为所求之商。

这方法可用于开三次或三次以上的任意次方。意大利数学家鲁菲尼（P.Ruffini，公元1765—1822年）于1804年和英国数学家和涅(G．Horner，公元1786—1837年）于1819年各自独立建立的求解数字高次方程近似根的方法，其演算步骤与贾宪的基本相同，但却晚了七百多年。



2—18 “开方作法本源”

3．贾宪的“开方作法本源”图。贾宪解方程时，反复地遇到二数和的任意次方的展开问题，因而他发现展开后的系数规律，造了一张数表，叫做

"开方作法本源"（图2—18），包括相当于由0次到6次的二项式展开式的全部系数。这些展开式用现代数学符号表示就是：

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

展开式和系数表还可以继续往下造。从展开式中又看出其规律性：表中间的每一个数都是它肩上两数之和。如四次展开式中的"6"，是由三次展开式的3加3得来的等等。这种作法可用$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$表示。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

有了"开方作法本源"图就能够把任何次的二项式展开。

这是数学上的一项重要发现。杨辉明确地说：这个图"出释锁算书，贾宪用此术"，就是"开方作法本源"图是贾宪创造的，载于《释锁》这本数学书中。为简化起见，我们可以把此图叫做"贾宪三角形"。以前有人称它为"杨辉三角"是不够妥当的。

贾宪的成就有世界意义。国外最早研究此种系数规律的是中亚数学家阿尔·卡西(Al-Kâshi)，他的研究成果于1427年发

表，比贾宪晚了三四百年。在欧洲，人们称它为"帕斯卡三角形"。帕斯卡（B.Pascal,1623—1662年），十七世纪法国科学家。他确实造过这种"三角形"，可是在他以前，十六世纪德国的阿披亚奴斯(Apianus)也曾造过。但都在贾宪之后。

遗憾的是，载有"开方作法本源"图的杨辉的《详解九章算法》现已不在我国。原来杨辉算书的部分内容已被收入明初编写的巨篇《永乐大典》中，而杨辉原著已不存在。清末，英国侵略者把《永乐大典》掠夺去许多册，其中恰好包括"开方作法本源"图的那一册，现仍藏于剑桥大学图书馆。

4．刘益方程解法的成就。刘益的数学著作《议古根源》载有二百道数学问题及其解法，其中大部分都是求方程的根。在刘益以前的方程大都有一定的限制，首项系数是正的而且是"1"，贾宪所研究的也不例外。刘益第一个在这方面进行了推广。例如在他研究的问题中有相当于$7x^2=9072$，$-5x^2+228x=2592$等方程，特别是他研究了一个四次方程$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$，这在我国数学史上是少见的。

刘益的方程没有什么条件限制，首项系数可正可负，同时次数可以带有任意性。杨辉对这些方程赞不绝口。他在《算法通变本末》中说："刘益以勾股之术，治演段锁方，譔（撰）《议古根源》二百问，带益隅开方，实冠前古。"特别指出了"带益隅开方"(解首项系数为负的方程)是前所未有的，是刘益的新创造。因此，他对刘益的工作有意进行传播，"辉（杨辉）择可作关键题问者，重为详悉著述，推广垂训刘君（刘益）之意"，从《议古根源》的二百个问题中选择了二十二个有代表性的问题写入自己的《田亩比类乘除捷法》一书中，一直保留到现在。因为《议古根源》已经失传，所以杨辉书中的

资料就成为研究刘益的主要依据了。

刘益对方程解法的成就是他倡用了“益积术”和“减从术”两种方法。在解四次方程时用的是“增乘开方法”。下面举例说明“益积术”和“减从术”的内容。

解方程 $x^2-12x=864$时，经观察，商为两位数，十位数应在3、4之间，故设 $x_1=x-30$，变原方程为

$$(x_1+30)^2-12(x_1+30)=864$$

或　$$x_1^2+2\times30x_1-12x_1=864+12\times30-30\times30=324$$

即　$$x_1^2+48x_1=324$$

又经议得商的个位数应有$x_1=6$，代入恰尽，故 $x=x_1+30=36$。

在这个解法中，先把原方程变换，将所得常数移至右端，把360加到“积”上，然后减去900，得324。所谓“益积”就是指由“积”(864+360)减去900，古代有“损之曰益”的说法，“益积”是“减积”的意思。这就是刘益的“益积术”。

上面的解法，经变换后把常数移至右端。将常数变形为 $864-(30-12)30=864-540$。这就叫“减从”，即从“隅”30减去“从法”12。“减从术”就是这个意思。

“减从术”与贾宪的增乘开方法略有不同。可是刘益在解四次方程 $-5x^4+52x^3+128x^2=4096$ 时所用的方法就和增乘开方法完全一致了。值得注意的是，刘益的方程是一般的四次方程，首项系数既是负的，又不是“1”，可以说是在解数字方程方面的一个很大突破。

沈括的数学研究

沈括（公元1030—1094年）是我国历史上一位杰出的科学

家。他多才多艺，在当时各学科领域内都取得了重要成就。沈括虽然出身于名门望族，本人又在北宋朝廷里做过官，但是比较接近下层，注重实际，曾经多次到生产作坊、工地或自然界里进行生产考察和科学考察，不仅掌握了大量第一手资料，而且亲自进行科学实验，从而对劳动人民在改造自然中的伟大作用有一定的认识。他说："技巧、器械、大小、尺寸、黑黄、苍赤，岂能尽出圣人！百工、群有司、市井、田野之人，莫不预焉。"①



沈　括

沈括晚年著有《梦溪笔谈》一书，内容丰富，有关科学技术方面的内容尤为可贵，因此被誉为"中国科学史的里程碑"②。他对数学进行了精深的研究，提出了不少卓越的见解。

1．对数学的正确认识。在沈括的时代，以邵雍、程颐、程颢兄弟等为代表的理学家，提倡所谓"象数学"，给数学披上一层神秘的外衣。生活在这个时代的沈括，虽然不免也受了一些唯心主义思潮的影响，但是他能够提出自己的独到见解，对数学有比较正确的认识。当时，在理学家们看来，数和形等数学概念不过是来源于什么"理"、"道"，甚至"心"等非物

① 沈括：《长兴集·上欧阳参政书》。

② J.Needham（李约瑟），Science and Civilisation in China, Vol.I, 1954,Combridge, P. 135.

质的东西。沈括则认为"天地之变，寒暑风雨，水旱螟蝗，率皆有法"，"大凡物理有常有变"①，还提出"耳目能受而不能择，择之者心也"②等看法，都是正确认识数学的思想基础。他指出：所有物体都呈现一定的形状，有形状就有数量。物体的方圆端斜就是形状，能进行乘除运算的是数量。③就是说，只有客观物质世界中存在的空间形式和数量关系，人们才能在实践中接收到它们发出来的信息，通过思考、加工而认识它们，形成数学概念。

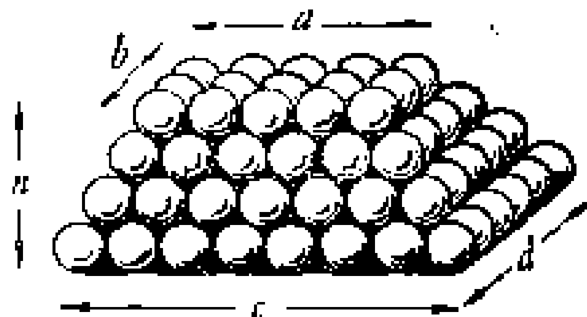
沈括还进一步认识到对于数学方法的使用不能生搬硬套，应当是"见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术"④。因此他把当时的各种简算法加以分析和比较，指出在什么条件下用什么方法。他还举出求一、上驱、搭因、重因和增成等简算法。对前几种算法他指出在计算上"皆不离乘除"，唯独最后一种"都不用乘除，但补亏就盈而已"⑤。实际上，增成法也用乘除，只是一位一乘罢了。如果位数少，这种算法较为简捷，位数多了也很繁琐，因此他认为位数多时还不如用普通乘除法。就是说计算时要根据各种简算法的特点和适用范围灵活运用，不可拘泥。

2．"隙积术"的发明。沈括随时留意各种问题，他在酒店里看到有很多酒坛按一定摆法堆放在那里，棋子也是有类似堆法。用现在的话来说，是这样：每层摆为一长方形，每上一层比下一层长、宽各少一个。假定最下一层长、宽分别为c、d

---

①③　沈括：《梦溪笔谈》卷七。
②　沈括：《长兴集·孟子解》。
④⑤沈括：《梦溪笔谈》卷十八。

个，最上一层长、宽各为 a、b 个，共为 n 层，问总共有多少个酒坛或棋子（图2—19）。如果是实体的台体可以用以前的公式计算，可是这个问题不能用体积公式，因为坛与坛间有缝隙。沈括对前人的各种算法进行了研究，结果发现别的公式都有，“独未有隙积一术”，“积之有隙者”则不能求。他经过反复研究，得到解决。设 S 为所求之总数，则有公式



2—19　隙积图

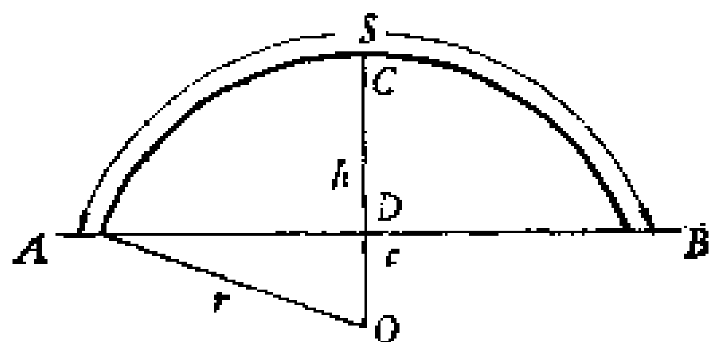
$$S=\frac{n}{6}\left[(2b+d)a+(b+2d)c\right]+\frac{n}{6}(c-a)$$

这个公式是怎样求得的，沈括自己没有说明。

“隙积术”公式是正确的。这公式与高阶等差级数有密切关系。沈括假令最上一层为长、宽各两个坛，以下每层长、宽各增一个，于是有 $2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25$，$6^2=36$，…，每后项与其前项之差依次为5、7、9、11、…。再求一次差均得 2，因此各层的个数构成一个二阶等差数列。对于长、宽不等的情况，也有这个性质。沈括的研究可以说是我国研究高阶等差级数（或数列）的开始，对后来影响很大。

3. 创立“会圆术”。沈括在数学上的另一成就是创立了“会圆术”。“会圆术”用现代的话来说就是已知弓形的矢（高）和圆的直径求弧长的方法。在这以前还没有人注意到这个问题，沈括是我国数学史上第一个研究弓形的弦、矢和弧之间的关系的数学家，并且求出了计算弧长的近似公式。沈括研究这个问题是由求弓形面积问题引起的。他认为原来求各种形状土地面积的方法可以说“方圆曲直尽矣”，但是“未有会圆之

术”。沈括认为凡是圆形的土地都可以分割成若干部分，求出每一部分的弧长合起来就是一个圆周。“会圆”一词就是这么来的。



2—20　会圆图

要想“会圆”，就必须解决求弧长问题。怎样求弧长？设 r 为圆半径，d 为直径，h 为弓形的高，S 为弧 $\widehat{ACB}$ 的长度，沈括用到了相当于下面的近似公式：

$$S \approx c + \frac{2h^2}{d}$$

其中 c 是弓形的底（弦）AB 之长，用公式

$$c = 2\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$$

计算。从图 2—20可以看出：这是勾股定理的一个简单应用。

“会圆术”后来在天文学等方面有重要应用。如果进一步考虑“会圆术”还有更深刻的思想，就是当所考虑的圆弧很小的时候，弓形的高 h 很小，h^2 便趋于零。可以认为有 $S \approx c$。这个近似等式说明直曲的互相转化，也是刘徽极限思想的继续。沈括虽未明确提到此点，但我们可做这样的分析。

4．“棋局都数”的计算。下棋与数学的关系很密切，除了对弈双方要运用筹划的思想外，棋局总数的计算也是组合数学问题。我国的围棋，棋盘上画着方格，在格内放棋子，那么棋局总共有多少局面？这个问题看起来很简单，如果棋路多了计算却很复杂。据说唐代的张遂计算过，但是怎么计算的，没有留下记载。沈括对棋局的总数进行了计算，他认为棋路多了，总数大得很，“非世间名数可能言之”，就是已有的数名

都不够用。他从二路开始计算，直到七路：棋盘是二路见方，有用四个棋子的位置，可变出八十一局，即 $3^4=81$。棋盘是三路见方的，有用九个棋子的位置，可变出一万九千六百八十三局，即 $3^9=19683$。一直下去，如果棋盘是七路以上见方的，棋局总数就无法用当时所有的大数名称表达出来。围棋的棋盘一般是十九路，共 $19\times19=361$ 个用子的位置。棋局总数更大到十分惊人的程度。可是，沈括研究出三种计算方法，求出了总数用现在的方法计算约为 $1.74\times(10000)^{43}$。重要的是，沈括在计算中用到了指数法则，如相当于 $a^3\times a^3=a^6$，$a^6\times a^6=a^{12}$，$a^{12}\times a^6=a^{18}$，$a^{18}\times a=a^{19}$，$a^6\times a^3=a^9$ 等等，就是同底两幂相乘其积等于以该底为底，指数相加为指数的幂。

秦九韶和他的《数书九章》

秦九韶（生活于十三世纪前中期），字道古，自称鲁郡人，实际生于四川。公元1224年，他父亲在南宋朝廷里做秘书少监，他也就居于都城临安（今杭州市），因而有机会去太史局（管理天文历法研究的机构）访问研究天文历法的人员，又同“隐君子受数学”，学习天文和数学等自然科学知识。1244年，秦九韶以通直郎为建康府（今南京市）通判，1252年又被调为沿江制置司参议。后来因为参与派系斗争失败，于1260年被贬到梅州（今广东梅县），不久就死在那里。

1．数学杰作《数书九章》。在沈括去世后约一个半世纪，秦九韶于公元1247年完成了重要数学著作《数书九章》一书，标志着当时我国数学的发展已达到高水平。全书十八卷，八十一道应用数学问题，按应用分为九大类，每类包括九道

题，每一大类的题目和基本内容如下：

一、大衍类 一次同余式问题

二、天时类 天文历法和气象中的数学问题

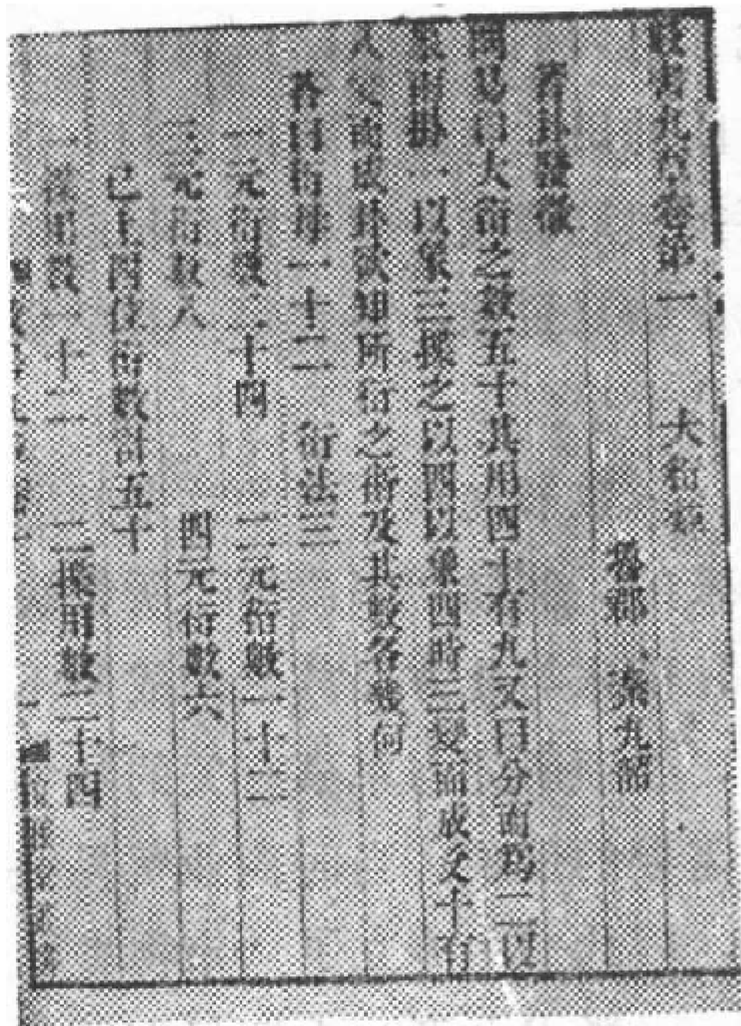
三、田域类 各种田亩的面积计算问题

四、测望类 几何测量问题

五、赋役类 各种赋税的计算问题

六、钱谷类 征购粮食和仓库等数学问题

七、营建类 土木建筑工程中的数学问题



數書九章卷第一 大衍類

魯郡 秦九韶

蓍卦發微

問易曰大衍之數五十其用四十有九又曰分而為二以

掛一以象三揲之以四以象四時三變而成爻十有

八變而成卦欲知所衍之術及其數各幾何

答曰衍母一十二 衍法三

一元衍數二十四 二元衍數一十二

三元衍數八 四元衍數六

已上四位衍數計五十

揲用數一十二 二揲用數二十四

2—21 《数书九章》书影

八、军旅类 军营、阵形的布置和军需供应等数学问题

九、市物类 商业方面的交易和利息的计算问题。

每道问题都有答案，答案之后有“术”和“草”。“术”是原理和解题的详细步骤。“草”是算草，非常详细，几乎全部过程都有。所用数字符号都是筹码字。还有一些解释和数学概念的定义，例如第一类“大衍类”的第一题答案之后便先定义了“元数”、“收数”、“通数”和“复数”四个概念。“元数”：“谓尾位见单零者”，就是整数；“收数”：“谓尾位见分厘者”，就是小数等。这也许是秦九韶为了以后在概念上明确起见才这样做的。

如果说王孝通在《缉古算经》里所收的问题已经够复杂的

话，那么秦九韶在《数书九章》中所研究的问题则更为复杂。例如“赋役类”第一题“复邑修赋”，计算甲、乙、丙、丁、戊、己六个乡“修赋”问题。六乡按途程远近分为三等，乡与乡间的田地有肥、瘠的差别，每乡的田地又各分为九等，每乡要按田地等级核算单位面积应纳田苗粮数，再折合成布匹数以及应纳夏税数，还有每乡共纳数等等。这一道题光答案就有一百八十个！

《数书九章》中的许多问题，都是根据当时的社会需要提出来的。例如“军旅类”所解决的数学问题与军事有关。那时，南宋与北方民族之间战争不断，为了解决战争中的一些问题，必须研究与军事有关的数学。“军旅类”问题就是这种社会需要的反映。当时商业贸易很发达，典当、借贷之事也很盛行，因此书中专立了“市物类”。

《数书九章》中还保存着其它一些非常有价值的科学史料。例如“天时类”的“天池测雨”、“圆罂测雨”和“竹器验雪”等三题，讲的是量雨器和量雪器问题，这是有关量雨器的最早的明确记载。“营建类”的“计作清台”题有一幅珍贵的《清台图》是我国现存最古的天文台图。

秦九韶研究数学的目的是“以拟于用”，主张“数术之传，以实为体”，是非常可贵的思想。但他又是数学家中第一个提倡“河图洛书”为数学起源的说法，并认为数学和“道”有同一个“本”（根源）。这“本”就是《易经》。他又从《易经》中引来“大衍”二字，冠于同余式及解法上，命名为“大衍求一术”。这些事实说明，秦九韶接受了较多的道学思想。《数书九章》是一部不可多得的优秀数学著作，曾引起国

际上的重视①。

2．“大衍求一术”。在本章第二节曾介绍了有名的“孙子定理”，并提到它的推广。这种推广是由秦九韶完成的。《孙子算经》以后，这个问题在民间流传很广，并且给它取了各种各样有趣的名称，如“秦王暗点兵”、“韩信点兵”、“鬼谷算”等。十九世纪以后，欧洲人把这问题叫做“中国剩余定理”。

《孙子算经》的“物不知数”题，数字都很简单，用试验的方法就可以得出答案。如果数字较大，同余式的个数又多，凭猜测试验就不能解决问题了。这种一般性的一次同余式组的科学解法，是由秦九韶首先解决的。

把“物不知数”问题改变一下形式，将除得的余数2、3、2分别用r_1、r_2、r_3表示，除数3、5、7分别用p_1、p_2、p_3表示，就有：

$$\begin{cases} N \equiv r_1 (\bmod p_1) \\ N \equiv r_2 (\bmod p_2) \\ N \equiv r_3 (\bmod p_3) \end{cases}$$

解法也随之变成：

$$N = 70r_1 \div 21r_2 + 15r_3 - 105p \quad (p\text{为整数})$$

这里的$105 = 3 \times 5 \times 7$，就是那三个除数3、5、7的乘积。以$M$表示这个积，那么70、21、15相当于$2 \times \frac{M}{p_1}$、$1 \times \frac{M}{p_2}$、$1 \times \frac{M}{p_3}$，用$k_1$、$k_2$、$k_3$分别代表2、1、1，就有$k_1\frac{M}{p_1}$、$k_2\frac{M}{p_2}$、$k_3\frac{M}{p_3}$。把这个问

① 例如比利时的李培始（U. Libbrecht）写了一部有关《数书九章》的专著，叫做《十三世纪的中国数学》，（Chinese Mathematics in the Thirteenth century，1973，London），共有555页。

题推广到一般情形，设 p_1、p_2、…、p_l 为两两互素① 的除数，r_1、r_2、…r_l 为 l 个余数，$M = p_1p_2$、…p_l，就有下面的同余式组：

$$\begin{cases} N \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, p_1) \\ N \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, p_2) \\ \cdots\cdots \\ N \equiv r_l (\mathrm{mod}\, p_l) \end{cases}$$

解法可用下式表示：

$$N = k_1\frac{M}{p_1}r_1 + k_2\frac{M}{p_2}r_2 + \cdots + k_l\frac{M}{p_l}r_l - pM$$

问题的关键在于使这些 k_1、k_2、…k_l 分别满足同余式 $k_1\frac{M}{p_1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p_1)$、$k_2\frac{M}{p_2} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p_2)$、…$k_l\frac{M}{p_l} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p_l)$。

如果 $p_i (i = 1, 2, \cdots l)$ 不是两两互素，秦九韶已经知道将它们化为互素，计算步骤相当繁琐，这里不讲了。

秦九韶的主要贡献，就是解决了 $k_i (i = 1, 2, \cdots l)$ 的具体求法。他的求法是：先由 $\frac{M}{p_i}$ 累减 $p_i (i = 1, 2, \cdots l)$，直到余数 $G < p_i$ 为止，这时有 $G \equiv \frac{M}{p_i} (\mathrm{mod}\, p_i)$。然后，他用辗转相除法求出 k_i。具体求法是：

$$\begin{array}{ll} p_i = Gq_1 + r_1 & k_1 = q_1 \\ G = r_1q_2 + r_2 & k_2 = q_2k_1 + 1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & k_3 = q_3k_2 + k_1 \\ r_2 = r_3q_4 + r_4 & k_4 = q_4k_3 + k_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & k_n = q_nk_{n-1} + k_{n-2} \end{array}$$

① 两两互素是指几个整数中，每两个的最大公约数都为1。

最后的r_n等于1时，就不再往下计算了，这时k_n就是所求的数。k_n是k_i中之一，两个脚码不是一回事，不可混淆。所谓“求一”就是指求到$r_n=1$，这就是有名的“大衍求一术”。

3．数字高次方程的近似根求法。秦九韶在数学方面的第二项重大成就是关于高次方程的近似根求法。贾宪创造了增乘开方法，而刘益方程的首项系数已不限于“1”，也不限于正数。秦九韶再次对这个问题进行了研究。《数书九章》已有各次的一元高次方程的一般形式，最高次数已经达到十次。可以说，在秦九韶看来，方程的次数已没有任何限制，随便多少次都行。这是代数学史上的一项重要成就。过去的方程，由于来源于长度、面积之类的问题，所以总是把常数项规定为正。如用现代符号表示，常数项就写在等号的右边，而秦九韶则规定“实常为负”，即常数项为负数，于是可以写在左边，其它各项的系数可正可负，没有限制。

秦九韶解任意高次数字方程的步骤和贾宪、刘益的步骤基本一致，也是在议得根的每位数后都要随乘随加。他的筹算式也分若干层，在未求出根以前，最上层为“实”，就是常数项，最下一层为“隅”，就是首项系数，实下为“方”就是一次项的系数，其余各项的系数称为“廉”，比如在四次方程中，二次项的系数为“上廉”，三次项的系数为“下廉”。对方程各项的系数的正负或缺项，秦九韶都有规定的称呼，缺项用“虚”字表示，正数前面加一个“从”字，负数前面加一个“负”字。首项系数是负的则加一个“益”字，叫“益隅”。而常数项他规定为负数，数字前不加区别正负的符号；下面以《数书九章》卷五“尖田求积”题“开翻法三乘方”为例，说明秦九韶求高次方程近似根的方法。他的原式如下面的形式，

用现代符号表示就是：

$$-x^4+763200x^2$$
$$-40642560000=0$$

然后，用二十个这样的式子依次进行计算，求得 $x=840$，恰尽。这是方程的一个准确正根。其具体解法步骤可以简化，一般用七步即可①，连上式在内共八式。为了便于阅读，把原式中的筹码改为阿拉伯数码，列式如下：

商〇
实 ≡〇⊤ ‖ 6 ⊤〇〇〇〇
虚方
从上廉 ⊥ ⊤ ≡ ‖ 〇〇
虚下廉〇
| 益隅

（1）

0	商
(−) 4 0 6 4 2 5 6 0 0 0 0	实
0	虚方
(+) 7 6 3 2 0 0	从上廉
0	虚下廉
(−) 1	益隅

这是由上式改成的未求根前的原形，如图(1)。

① 钱宝琮：《增乘开方法的历史发展》，《科学史集刊》，第2集（1959），第126—143页。

（2）

	800	商
(−)	40642560000	实
	0	方
(+)	763200	上廉
	0	下廉
(−)	1	益隅

把“上廉”向左移四位，“益隅”向左移八位，经初步考虑，得根的最大一位数8，即“上商八百为定”。放在百位上，如图（2）（秦氏原书上的第三式）。

（3）

	800	商
(+)	38205440000	正实
(+)	98560000	方
(+)	123200	上廉
(−)	800	下廉
(−)	1	益隅

“以商生（乘）隅”得 $-800\times(100)^3$，“入益下廉”，再“以商生下廉，消从上廉”，即 $8\times(-800(100)^2)+763200\times(100)^2=123200(100)^2$ 为上廉。“以商生上廉，入方”，即把 $8\times123200(100)^2=985600\times(100)^2$ 加到“方”上。“以商生方，得正积，乃与实相消”就是

$$8\times9856000000$$
$$-40642560000$$
$$=38205440000$$为新正实。

“以负实消正积，其积乃有余，为正积”。如图（3）（秦氏的第八式）。

（4）

800	商
(+) 38205440000	实
(−) 826880000	方
(−) 1156800	上廉
(−) 1600	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即$8\times(-100(100)^3)+(-800(100)^3)=-1600(100)^3$。"以商生下廉，入上廉内，相消"即得$-1156800(100)^2$。"以正负方相消"，即以8乘上廉和原有的方相消得$-826880000(100)$，如图（4）(秦氏的第十三式)。

（5）

800	商
(+) 38205440000	实
(−) 826880000	方
(−) 3076800	上廉
(−) 2400	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即$8\times(-100(100)^3)+(-1600(100)^3)=-2400(100)^3$。"以商生下廉，入上廉"，算得负上廉为$-3076800(100)^2$。如图（5）(秦氏的第十五式)。

（6）

800	商
(+) 38205440000	实
(−) 826880000	方
(−) 3076800	上廉
(−) 3200	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即以8乘益隅，加入下廉，得$3200(100)^3$。如图（6）(秦氏的第十六式)。

（7）

8 4 0	续商
(+) 3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	实
(−) 8 2 6 8 8 0 0 0 0	方
(−) 3 0 7 6 8 0 0	上廉
(−) 3 2 0 0	下廉
1 (−)	益隅

把“方”向右退一位，上廉退二位，下廉退三位，隅退四位，议得“续商四十”。如图（7）（秦氏的第十七式）。

（8）

8 4 0	商
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	实
(−) 9 5 5 1 3 6 0 0 0	方
(−) 3 2 0 6 4 0 0	上廉
(−) 3 2 4 0	下廉
(−) 1	益隅

以续商4乘隅，加入下廉内得$-3240(10)^3$。再以“商生下廉，入上廉内”，得$-3206400(10)^2$，“以商生上廉，入方内”，得$-955136000(10)$。最后以4乘方，和正实相消，“适尽”。840为所求之根。如图（8）（秦氏的第二十一式）。

上面的计算步骤相当于：首先对（1）进行变换，即设$x=100x_1$，原方程变为

$$-(100)^4x_1^4+763200\times(100)^2x_1^2-40642560000=0$$

这就是（2）式。议得根的第一位数为8，进行代换$x_2=x_1-8$，经计算得

$$-(100)^4x_2^4-3200\times(100)^3x_2^3-3076800\times(100)^2x_2^2$$
$$-826880000\times(100)x_2+38205440000=0$$

此为（6）式。式（7）中的各项系数是由（6）经“退位”而得，实际上就是由变换$x_3=10x_2$得到的，它的现代形式是

$$-(10)^4x_3^4-3200\times(10)^3x_3^3-3076800\times(10)^2x_3^2$$
$$-826880000\times(10)x_3+38205440000=0$$

“续商” 4 （实为40），则原方程变为

$$-(10)^4x_3^4-3240\times(10)^3x_3^3-3206400\times(10)^2x_3^2$$
$$-955136000\times(10)x_3=0$$

常数项已消去就是（8）式，恰尽4，于是

$$x=100x_1=100(8+x_2)=100\left(8+\frac{x_3}{10}\right)=840。$$

这就是所求的一个根。

前边计算中的$(100)^3$、$(100)^2$……是变换的系数，筹式上不写出。

从这个例题可以看出：秦九韶的解法与贾宪“增乘开方法”一致，但已能解任意次方程。

4．线性方程组解法及其它。秦九韶在《数书九章》中有些问题相当于解线性方程组，一般地说数字都很大，也很复杂。原来《九章算术》解这种问题用“直除法”，刘徽曾有改进，但影响不大，后来人们仍用“直除法”解线性方程组。秦九韶作了彻底改进，一直采用互乘相消法。特别值得提出的是他在解题中用到相当于增广矩阵的初等变换，只要把秦九韶的原式稍加改变，加上矩阵符号即可。现以《数书九章》卷十七“均货推本”题为例说明秦九韶解线性方程组的具体步骤。以下是这道题的一部分。

甲、乙、丙、丁四人合伙购买沉香五千八十八两、胡椒一万四百三十包（每包四十斤）、象牙二百一十二合（每合重量相等）。甲有本金二百两、盐四袋、钞① 一十道，乙有本银八

① 钞相当于现在的纸币。

百两、盐三袋、钞八十八道，丙有本银一千六百七十两、度牒①一十五道，丁有本度牒五十二道、金五十八两八铢②。以上共估值四十二万四千贯。问甲金、乙盐、丙银、丁度牒各合多少贯文和每人本钱合多少贯。

需要说明的是题中的盐和钞的关系，秦九韶在演草中写着“以四袋乘钞一十道，得四十袋”，就是甲钞一道折盐四袋，即相当于在他本中有四十袋盐，又“乙钞八十八道，以三袋乘之，得盐二百六十四袋”，就是乙钞一道折盐三袋，即相当于在他本中有盐二百六十四袋。因此，在他的计算中不再有钞，全由盐代替。秦九韶先把总估值424000贯用四人均分各得106000贯，计算时筹码写作：“|〇T〇〇”，省去一位，下加“十贯”两字。他列成筹算式，然后进行演算，于是有一系列筹算式，并且各有名称，第一个叫“首图”，以下依次为“次图”、“定率图”、“维图”等等。每个图相当于一个增广矩阵。头两个图如下：

左行	次行		副行	右行
|〇T〇〇 十贯 金 度牒	|〇T〇〇 十贯 银 度牒	首图	|〇T〇〇 十贯 盐 银	|〇T〇〇 十贯 金 盐
十贯 金 度牒	|〇T〇〇 十贯 银 度牒	次图	十贯 盐 银	|〇T〇〇 十贯 金

① 度牒相当于现在的汇票。

② 铢是一种重量单位，等于一两的二十四分之一。

上两个图相当于以下两增广矩阵：（“首图”第四行“金〓Ⅱ”后还应有分数三分之一，原书未写）

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 200 & 10600 \\ 0 & 800 & 264 & 0 & 10600 \\ 15 & 1670 & 0 & 0 & 10600 \\ 52 & 0 & 0 & 58 & 10600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 200 & 10600 \\ 0 & 800 & 264 & 0 & 10600 \\ 15 & 1670 & 0 & 0 & 10600 \\ 156 & 0 & 0 & 175 & 31800 \end{pmatrix}$$

很显然，第二个矩阵是由第一个矩阵的第四行乘以 3 而来。

设度牒每道值钱 x 文，银每两 y 文，盐每袋 z 文，金每两 w 文，则“首图”相当于由下列线性方程组的系数和常数项所构成：

$$\begin{cases} 40z+200w=10600 \\ 800y+264z=10600 \\ 15x+1670y=10600 \\ 52x+58w=10600 \end{cases}$$

（10600下应有“十贯”，今省去。）

秦九韶继续进行计算（实即进行变换），最后得“终图”

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 480000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 250000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 50000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1500000 \end{pmatrix} \text{相当于答案：} \begin{cases} x=1500000 \\ y=50000 \\ z=250000 \\ w=480000 \end{cases}$$

秦九韶的工作已有了矩阵的萌芽。矩阵在外国是十九世纪才建立起来的。

此外，秦九韶还解决了“三斜求积”问题，即已知三角形的三边求其面积。他假定三角形三边为13步、14步、15步。虽是特殊的，但解法具有一般性，设 a、b、c 为三边，S 为面积，秦九韶的步骤相当于下面的公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$$

这和古希腊的“海伦公式”

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad\left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

是等价的。此公式在阿拉伯、印度也曾出现过①。

总之，秦九韶根据当时社会提出的各种数学问题进行了刻苦钻研，做出了重要贡献。

数学教育家杨辉

宋代数学在向高深发展的同时，简算法、数学口诀、纵横图、初等级数等也得到了很大的发展和普及。当时有些人从事数学教育和普及工作，收到很好的效果。南宋末的数学家和数学教育家杨辉可为这方面的代表人物。

1．杨辉的数学教育和普及工作。杨辉，字光谦，南宋末（十三世纪后期）钱塘（今杭州市）人。大概在某地做过地方官吏，因此当时有人说他“以廉饬己，以儒饰吏”②。他一生大部分时间可能是在杭州度过的，在他的著作中引有《台州量田图》，也许到过台州（今浙江省临海县）。杨辉特别注意当时社会上有关数学计算方面的问题，他对度量衡的使用也很关心，所以他在书中有“辉伏睹京城见用官斛号杭州百合，浙郡一体行用”。说明当时浙江各地都使用南宋政府颁发的“官

① 李迪：《“海伦公式”的历史》，载《数学通报》，1962年7月号，第42—43页。

② 陈几先：《日用算法序》。

斛”，叫做“杭州百合”①。

杨辉是当时东南一带有名的数学家，他走到哪里都有人请教数学问题。他到姑苏（今江苏省苏州市）的时候，就“有人求三七差分，继答之”②。

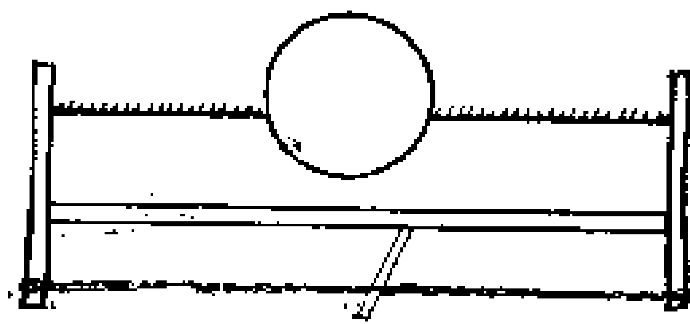
杨辉结合自己的工作，搜集和阅读了大量的数学著作，进行研究，从1261到1275年先后编成数学书五种二十一卷，即《详解九章算法》十二卷(1261)、《日用算法》二卷（1262）、《乘除通变本末》三卷（1274）、《田亩比类乘除捷法》二卷（1275）和《续古摘奇算法》二卷（1275）。他所编写的数学书，内容多数较浅显，可能都是为了教学用的。他认为《九章算术》是一部数学经典著作，但不宜于初学，因而加以详解、改编："今首以乘除加减为法，称斗尺田为问，编诗括十三首，立图草六十六问”，“凡题法解白不明者，别图而验之；编乘除之术，以便入门”，又对原书的问题作了“题解”和“纂类”，这样便可“以通俗务”，起到普及的作用。

杨辉写的数学书，一般都是由浅入深的。他把《九章算术》按难易重新“分别门例，使后学周知”，编成“纂类”附于他的《详解九章算法》之后。“纂类”的分法是：乘除、分数、比例、比例配分等等，这样适于初学。在教学中，杨辉特别注意循序渐进，总是由最简单的算法开始，逐步接触比较复杂的内容。

杨辉书中所选取的例题大都是日常所用的问题。他还特地写了《日用算法》一书，专讲日常所用的数学。其中由浅入深

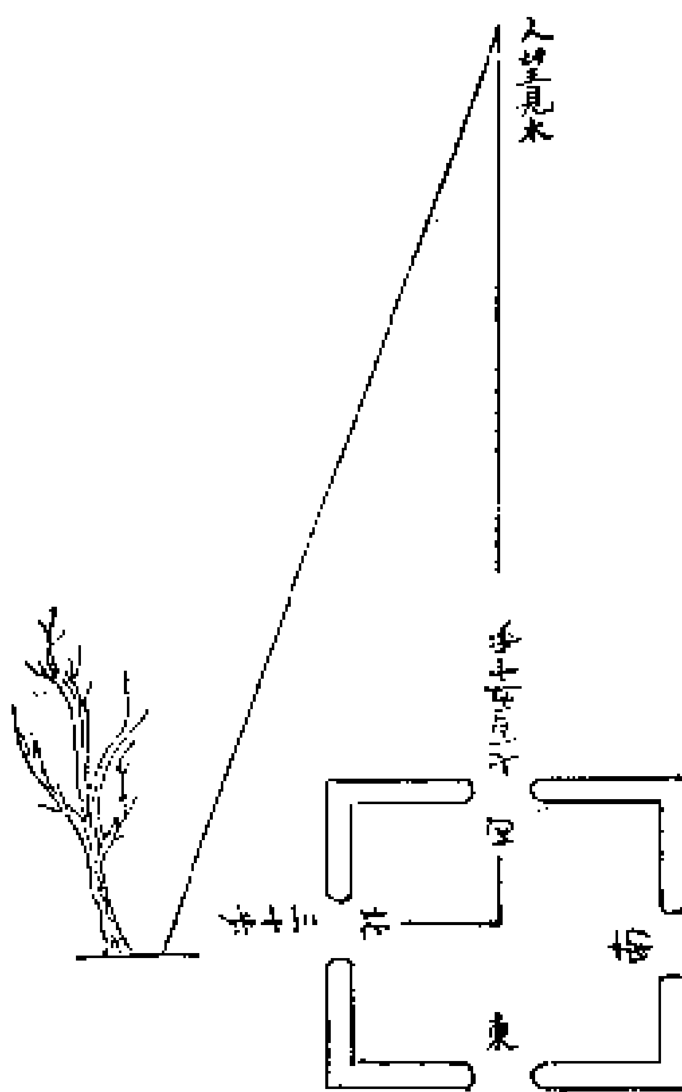
① 杨辉：《续古摘奇算法》卷上。
② 同上，卷下。

地讲了九九口诀、算术四则运算、日用度量衡、土地丈量、堆垛、修建和商品交换等民间常用的问题。



2—22《详解九章算法》插图

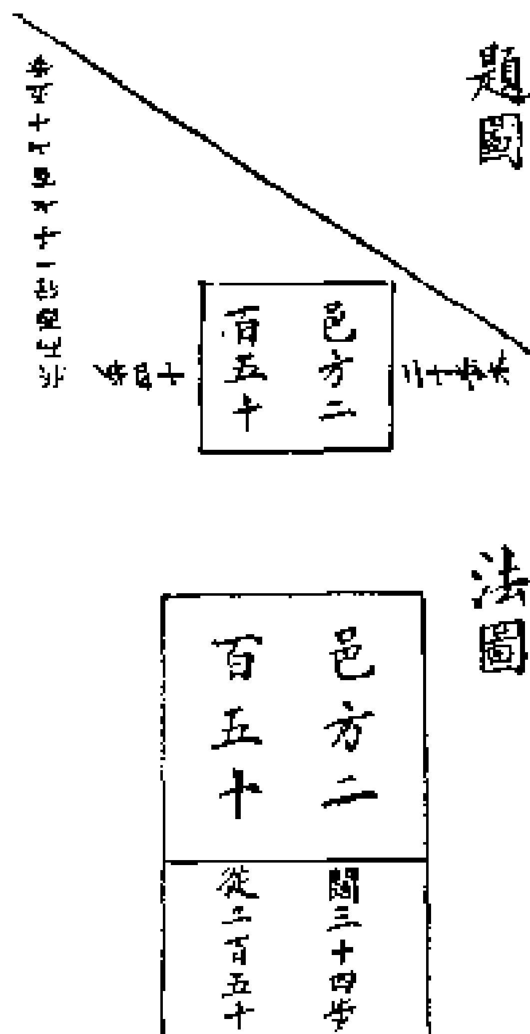
杨辉在书中，还画了许多图形。其中有些已经失传了。例如在《详解九章算法》书前，他补画了一卷图形，据《算法通变本末》卷上说“列图于卷首”。现在卷首无图，原图大概失传了。从书中留下的插图来看，有些图画得很生动，如“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长尺，问径几何”题，画了一个锯和一个圆圈，表示圆材的横截面（图2—22），锯的图形也很珍贵。还有“今有邑，方不知大小”一题，也画了一幅图：一个正方形的“邑”，有东、西、南、北四个门，



2—23　《详解九章算法》插图

北门外有一棵树（图2—23），一看就会理解题意。此外，有的题目，不仅有“题图”，而且还有“法图”，例如另一道“今有邑，方不知大小”题，画了下面（图2—24）这样两幅图。杨辉的这种做法，在同时代的其它数学书上很少见。

杨辉很注意讲清题意，处处为学习的人着想。要学习者“全要认题之主意”，这样就可以避免由于误解题意而弄错。他在《详解九章算法》一书中加了“解题”一项，先解释问题的性质，然后再讲解题的原则和演算过程。



2—24 《详解九章算法》插图

在《乘除通变本末》卷上开头有一篇“习算纲目”，是一份珍贵的古代数学教学计划，可以说是杨辉多年从事数学教育工作的经验总结。“纲目”的开头是“先念九九合数”。杨辉主张“自小至大”地由“一一如一，至九九八十一”的学习九九口诀。我国古代，九九口诀的次序是颠倒的，是由“九九八十一”开始的。故有“九九”之称。这不符合人的认识规律，大概到南宋初，才恢复了这样的次序，当时被称为“俗语算术”①。此后，在数学著作中再也不见有“自大至小”的逆序九九表了。

杨辉在“纲目”中对每种新内容学习之后都安排了“温习”。根据内容的难易安排时间，同时还指定了参考书。

2．数学诗歌。杨辉在《日用算法》的自序中提到“编诗括十三首”，这是为了便于初学者而编的。可惜这些数学诗都已失传。后来虽然有人引用，可是也没有指明出处，所以很难知

① 洪迈，《容斋续笔》卷六。

道它们的真实情况。在《乘除通变本末》卷中有“求一乘”和“求一除”诗各一首，合辙押韵，而且不失数学意义。

“求一乘”诗括：

五六七八九，　　倍之数不走，
二三须当半，　　遇四两折扭。
倍折本从法，　　实即反其有，
用加以代乘，　　斯数足可守。

“求一除”诗括：

五六七八九，　　倍之数不走，
二三须当半，　　遇四两折扭。
倍折本从法，　　为除积相就，
用减以代除，　　定位求如旧。

这本书中还有一首“九归”诗，五言四句：

归数求成十，　　归除自上加，
半而为五计，　　定位退无差。

每句下有九归口诀，杨辉曾说“以古句今注两存之”。可见这首诗不是他作的，而口诀则出自他的手笔，因此他叫做“九归新括”。

杨辉书中有许多歌诀，便于记忆，容易推广。例如两位除数的除法歌诀，“八十三归”歌诀就是以83为除数的除法，如下

见一下十七　$\frac{100}{83}=1+\frac{17}{83}$,

见二下三十四　$\frac{200}{83}=2+\frac{34}{83}$,

见三下五十一　$\frac{300}{83}=3+\frac{51}{83}$,

见四下六十八　$\frac{400}{83}=4+\frac{68}{83}$，

见四一五作五　$\frac{415}{83}=5$。

又如"六十九归"歌诀：

见一下三十一　$\frac{100}{69}=1+\frac{31}{69}$，

见二下六十二　$\frac{200}{69}=2+\frac{62}{69}$，

见三下百二十四　$\frac{300}{69}=3+\left(1+\frac{24}{69}\right)$，

见三四五作五　$\frac{345}{69}=5$。

等等，后来演变成飞归口诀。

还有斤、两换算口诀，如下：

一求，克退六二五，　1 两 $=\frac{1}{16}$斤 $=0.0625$斤，

二求，克退一二五，　2 两 $=\frac{2}{16}$斤 $=0.125$斤，

三求，克退一八七五，　3 两 $=\frac{3}{16}$斤 $=0.1875$斤，

四求，克退二十五，　4 两 $=\frac{4}{16}$斤 $=0.25$斤。

……　　　　……

九九以外的数学口诀大概从唐末以后就有了。宋代已有《法算三平化零歌》、《法算口诀》等书，大概都是专讲歌诀的。可惜这些书都已失传。杨辉书中所载的数学歌诀是流传至今的最早的一批。

3．简算法的发展。由于当时社会经济的发展，对于算术的要求日益提高。特别是因为需要大量重复计算，人们必然要研究怎样使重复计算简化，以加快计算速度。实际上这个问题，早已有人研究，例如五代时敦煌千佛洞的一份"算表"，把长方形地亩的计算造成一个数表，表的上端和右侧均列步数。只要量出长、宽的步数，不用计算可立即在表中查出亩

数。后来沈括所说的“见简即用，见繁即变”也是简化算法的意思。沈括以后在民间有人总结地亩的简算法，包括各种常见平面形面积的计算。此外有一种“既已得积步之数，欲捷于计亩”的简算法，是他处少见的。这个问题是已知土地的平方步然后求亩数。具体算法是：“一除二四，二除四八，三除七二，四除九六，五除一二，六除一四四，七除一六八，八除一九二，九除二一六。盖一亩者除二百四十也，二亩者除四百八十也，三亩者除七百二十也，推而上之，十亩除二千四百也，二十亩除四千八百也，三十亩除七千二百也。又推而上之，一百亩者除二万四千也，二百亩者除四万八千也，三百亩者除七万二千也。”① 当时二百四十平方步为一亩，只要知道“积步”数，便可立即求出是多少亩，不必进行较多的计算。

杨辉致力于简化算法的研究，并且取得一些成就。他总结当时的乘法提出了“单因”、“重因”、“身前因”、“相乘”、“重乘”、“损乘”等方法，在乘数、被乘数位数不同、情况不同的条件下可以用不同的方法计算。例如“重乘”就是把相乘两数之一分解为素因数之积的形式，然后用因数去乘，这样可把多位数乘法变成位数较少的乘法，他认为“乘位繁者，约为二段，作二次乘之，庶几位简而易乘，自可无误也”。杨辉举了38367×23121这个例子，把23121分解为9×7×367，先以数367去乘38367，得1480689，然后再用9×7＝63乘之。

由于乘除法简捷算法的需要，杨辉特别注意一个整数是合数还是素数的问题。他的“连身加”一词就是指素数，例如29下加“连身加”三字，201到300之间的所有素数都有这样标

① 赵彦卫：《云麓漫钞》卷一。

记，造成一张数表，用起来很方便。对整数的这种研究，我国是从杨辉开始的，他以前没有人研究过。

“求一乘”和“求一除”也是简算法。是用加减代乘除，通过折、倍、因来实现。例如237×56，用“求一乘”首先是倍56，亦即$2\times56=112$。再折237，即$\frac{237}{2}=118.5$，然后去乘。又如$13272\div56$，用“求一除”作$26544\div112$。这样做的目的是要把乘数（或除数）的头位数变为“1”，计算就变成了加减法。上举的$118.5\times112=118.5\times100+118.5\times10+118.5\times2=11850+1185+237=13272$。所谓“求一”就是变头位为一的意思。这里所说的“求一”与“大衍求一术”的“求一”根本不是一回事。

杨辉的“损乘”法是一种以减法代乘法的算法。在他以前虽然已经有人用过，但是对于其中某些部分，杨辉则作了较系统的叙述。“损乘”又分为“损一位”、“损二位”等等若干种情况，这里不多讲了。

4．级数求和与纵横图。杨辉在《详解九章算法》中讲到了一些“垛积”问题，本质上都是求级数前n项和的问题。有以下四种：

（1）方垛：

$$S=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$
$$=\frac{h}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)(b-a)$$

（2）果子垛：

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

（3）三角垛：

$$S=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

（4）果子垛：

$$S=a\cdot b+(a+1)(b+1)+\cdots+(c-1)(d-1)+cd$$
$$=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$$

在《算法通变本末》中，杨辉也提到几个级数求和问题，有三角垛两问，相当于式（3），还有四隅垛一问，相当于式（2）。

公式（4）和沈括"隙积术"完全一致。其余都是式(4)的特殊情形，例如当 $a=b$ 时式（4）就变成式(1)，当 $a=b=1$ 时式（4）就变成式（2），等等。

杨辉对这些级数求和公式都有明确的叙述，例如式（2）为："下方加一，乘下方，为平积，又加半为高以乘下方，为高积，如三而一"。

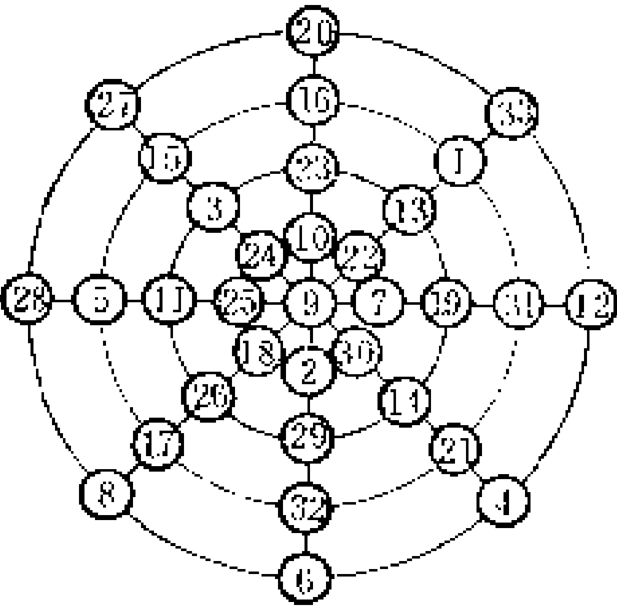
4	9	2
3	5	7
8	1	6

2—25　九宫图

此外，杨辉还研究过纵横图，并有所创造。纵横图是早期组合数学的一个内容，现代已经在许多实际问题上得到应用。至迟在汉代就有了三阶纵横图，由1到9的九个数字排列成一个正方形，各行各列和对角线的每三个数字相加都得十五。叫做"九宫图"（图2—25）。杨辉在《续古摘奇算法》（1275）一书中收入将近20个纵横图，不仅有正方形的，而且还有其它形状排列的。方形的"百子图"（图2—26）是由1到100排列成十阶纵横图，纵、横之和均为505，而对角线都不是这个数。"攒九图"（图2—27）是圆形的纵横图，由1到33排成四个同心圆，中心置9，并且形成四个直径。各直径的各数之和为147，各圆周上的各数之和都等于138。

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

2—26　“百子图”



2—27　“攒九图”

第五节　传统数学的继续发展

公元1126年北宋灭亡以后，北方由女真族建立的金政权所

统治，公元1279年元朝建立全国统一政权。数学在金元时代继续发展，李冶、朱世杰等是当时最重要的数学家。同时，中国与阿拉伯间的数学交流也很频繁，对中国数学的发展产生了一定的影响。

半符号式代数——“天元术”

现在的代数式用a、b、c…表示已知数，x、y、z…表示未知数，这是人们所熟知的。这种记法是十六七世纪时在欧洲逐渐发展起来的，沿用至今。类似的方法在我国古代也有萌芽，这就是“天元术”，它在解题时总是先说“立天元一为某某”，和“设x为某某”非常相仿。

1．**“天元术”的产生**。天元术估计产生于十二世纪。唐代的王孝通已能解三次方程，十一世纪时解方程的方法又有新的发展。解方程总要排成筹式，而在筹式中没有未知数，显示不出每一项的次数，这些都需要解方程的人去记忆。所以很不方便，而且容易出错。人们想了一些办法改进筹式，天元术就是这种改进的方法之一。天元术是在方程的筹式的每一项旁边加一种记号，尤其是在特殊项，如一次项、常数项旁加上记号指明其具有某种特殊性，以便于辨别次数。在我国古代常用一些文字做记号，如用天干、地支、八卦命名地理方位和用地支命名昼夜时刻，方程筹式各项的记号就是以这种思想为指导来选择的。就这样产生了以文字作记号为多项式各项系数命名的新方法。最初是每一项用一个文字表示，常数项用“人”表示，一次项以上各项系数分别以“天”、“上”、“高”、“层”、“垒”、“汉”、“霄”、“明”、“仙”表示，最高次项为九次。常数项

以下为负数次幂，最低为负九次，分别用"地"、"下"、"低"、"减"、"落"、"逝"、"泉"、"暗"、"鬼"表示。即$a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots+b_8x^{-8}+b_9x^{-9}$可表为右图的形式。

仙a_9
明a_8
⋮
天a_1
人c
地b_1
⋮
暗b_8
鬼b_9

大约十二世纪末或十三世纪初，太原府（今山西）有个叫彭泽的数学家把上面表示法的次序颠倒过来，改为"立天元在下"。后来象《复轨》等数学书中都采用了彭泽的表示法。十三世纪中期的李冶说这种"立法与古相反"①，这说明天元术已有一段较长的历史了。

天元术首先流行于现在的山西、河北一带。十二、三世纪间在这一地区的数学中用到天元术。平阳（今山西临汾县）蒋周的《益古》、博陆（今河北蠡②县）李文一的《照胆》、鹿泉（今河北获鹿县）人石道信的《钤经》、平水（今山西新绛县）刘汝锴的《如积释锁》以及绛（今山西冀城县）人元裕为《如积释锁》所作的细草等，这些书中都包括天元术的内容。可见天元术在当时已相当流行了。

2．李冶对天元术的改进与总结。天元术虽是我国数学中一项重要成就，但是方法不够灵便，每一项用一个字表示也是不必要的。其实只要知道筹式的次序，用一个字表示就可以了。首先进行这种简化工作的是数学家李冶。

李冶（公元1192—1279年），字仁卿，号敬斋，金元时期

---

① 李冶：《敬斋古今注》卷三。
② 蠡音离 lí。

真定栾城（今河北栾县）人。金正大七年（公元1230年）中进士，作了地方官，不久因金朝灭亡而隐居于今山西、河北一带。他一面进行数学研究，一面收徒讲学。在这期间完成了《测圆海镜》十二卷（1248年)和《益古演段》三卷(1259年)两部数学著作。这两部书辗转流传到现在，是古代数学的珍品。

李冶的天元术改用一个"元"或"太"字表示一次项或常数项。在一个筹式中用"元"不用"太"，用"太"不用"元"。在《测圆海镜》中由高次幂向低次幂上下排列。而《益古演段》的次序则颠倒过来。"元"字都在一次项之旁。两者的区别如右图所表示的那样。在《测圆海镜》中的天元式为

a_n	b_n
⋮	⋮
a_2	b_2
a_1元	b_1
c	c
b_1	a_1元
b_2	a_2
⋮	⋮
b_n	a_n
《测圆海镜》图式	《益古演段》图式

元

相当于方程

$$x^3 + 336x^2 + 4184x + 2488320 = 0$$

而在《益古演段》中的筹式

≡丅○○
丨=○元

相当于方程

$$120x+3600=0$$

两者的次序刚好相反。

两本书都用“太”字表示常数项。

筹式中的负项则打上一个斜划，如《测圆海镜》中的筹式

||
一||○○
三丅○○○○太

相当于方程

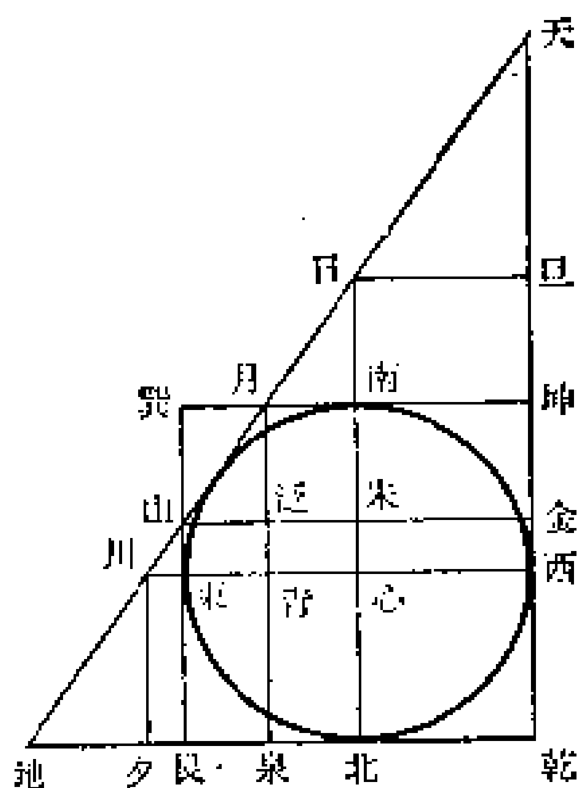
$$2x^2-1200x+360000=0$$

天元术经过长期发展和演变，到李冶的时候作了改进，成为简捷的固定形式。他的两本书是对天元术作了一次总结。

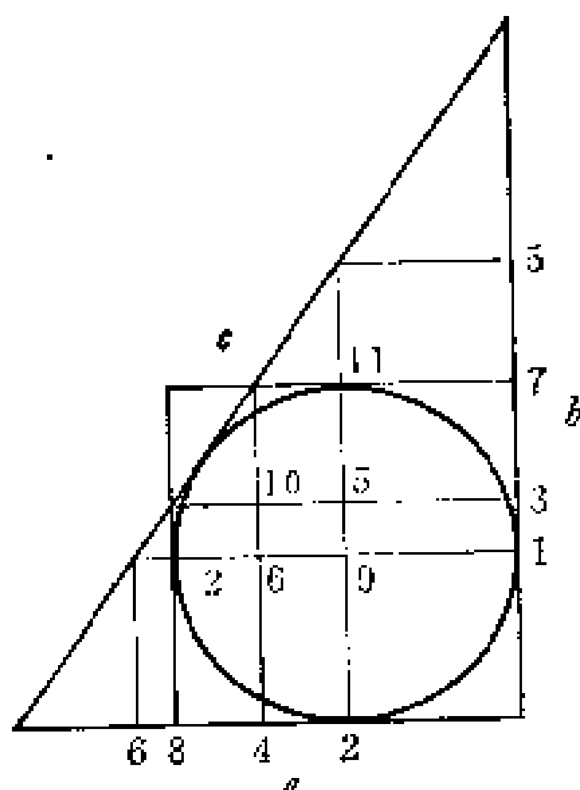
3. 几何问题与天元术的应用。李冶在《测圆海镜》中提出了六、七百条几何定理。其中有一百七十条属于勾股容圆问题，是所谓“洞渊九容之说”的发展。他对这类问题研究的经过有一段自述说：“截弧截矢截背之互见，内外诸角，析剖条支，莫不各自名家与世作法，及反复研究，卒无以当吾心焉。老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。”在此基础上编成《测圆海镜》一书①。书中“洞渊”可能是指一个人。北宋时处州（今浙江丽水县）有一位“洞渊大师”，名叫李思聪②，李冶所说的或许

① 李冶：《测圆海镜序》。
② 王应麟：《玉海》卷一。

是此人。李冶所提这些问题的内容大体上都是属于求三角形内各种条件下容圆的直径和研究勾、股、弦及其和、差间的关



2—28　《测圆海镜》之"圆城图式"



2—29　《测圆海镜》之"圆城图式"今式

系。例如在《测圆海镜》卷一开头有一"圆城图式"。如图2—28，在一个大勾股形天地乾中有一内切圆，在此形中又作一些特殊线，构成了十二个勾股形，都和原来的勾股形相似。为了叙述方便，我们把"圆城图式"改用现代符号标记，以 a、b、c 表示大勾股形勾、股、弦之长，其余十二个勾股形的勾、股、弦分别以 a_k、b_k、c_k $(k=1,2,\cdots 12)$ 表示其长，图2—29中的阿拉伯数码表示大勾股形以外的各勾股形的直角顶点，如原图中的"天川西"，它的三个边用 a_1, b_1, c_1 表示，但只在"西"处写"1"……数码相同的表示两个勾股形全等，用 D 表示内切圆的直径。我们用这些记号表示第二卷的前十个各种容圆问题，其中的九个如下：

（1）勾股容圆 $D=\frac{2ab}{a+b+c}$

（2）勾上容圆 $D=\frac{2a_1b_1}{b_1+c_1}$

（3）股上容圆 $D=\frac{2a_2b_2}{a_2+c_2}$

（5）勾股上容圆 $D=\frac{2a_9b_9}{c_9}$①

（6）勾外容圆 $D=\frac{2a_7b_7}{b_7+c_7-a_7}$

（7）股外容圆 $D=\frac{2a_8b_8}{a_8+c_8-b_8}$

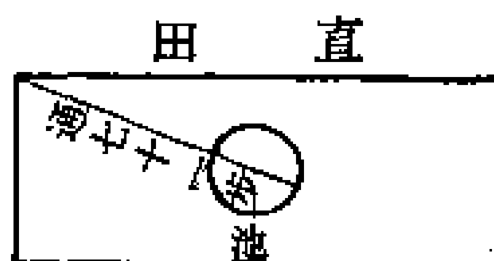
（8）弦外容圆 $D=\frac{2a_{10}b_{10}}{a_{10}+b_{10}-c_{10}}$

（9）勾外容半圆 $D=\frac{2a_{11}b_{11}}{c_{11}-a_{11}}$

（10）股外容半圆 $D=\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}-b_{12}}$

这九个问题也许就是“洞渊九容”。

《益古演段》中一共收入64道题，大都是各种平面形间的面积关系。解决问题的方法往往是通过天元术和“等积变换”（即“演段”）两种。例如第31题：“今有长方形田地一块，中间有圆形水池，池外的面积为三千九百二十四（平方）步。通过长方形一个顶点的直径和圆外到顶点的距离之和为七十一步，长方形的两边

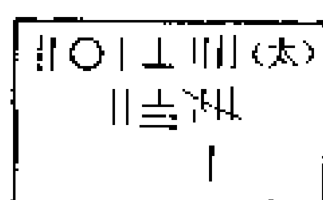


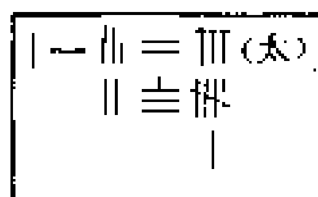
2—30 《益古演段》第31题图

① 第4个公式未录。

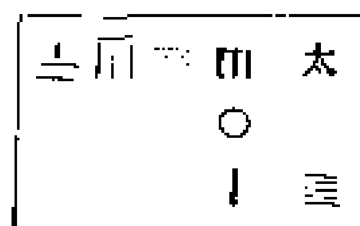
差为九十四步。问圆的直径、长方形的长和宽各多少步？”（图2—30）

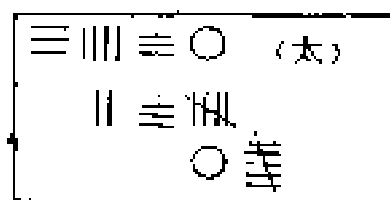
李冶先用天元术解决。“立天元一为内圆径，以减倍通步一百四十二步，得 |≡‖太 为长方形田斜（对角线）”，即：设 x 为圆径，2倍“通步”七十一步得一百四十二步，再减圆径 x，即 $142-x$ 为对角线。将 $142-x$ 平方，得 $20164-284x+x^2$，李冶记作(a)那样。这是两块长方形田地面积与长、宽差平方的和。再将长宽差94步平方得8836（平方）步，与上式相减，得 $11328-284x+x^2$，即（b）


（a）


（b）

为两块长方形田地面积，“寄左”（放置在左边）。把直径 x 平方为 x^2，“三之二而一”，即 $\frac{3}{2}x^2(=1.5x^2)$，记为 ○|≡太。这是两个水池的面积和（以3为 π 值，$\frac{3}{2}x^2$ 相当于 $2\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$）。将池外的面积也二倍，得7848平方步，与 $1.5x^2$ 相加，得即 $7848+1.5x^2$（筹式如(c)），也是两块长方形面积之和，与前面“寄左”之式相等。即 $7848+1.5x^2=11328-284x+x^2$，由此得 $3480-284x-0.5x^2=0$（筹式如(d)），李冶解方程得 $x=12$ 步，即为所求。

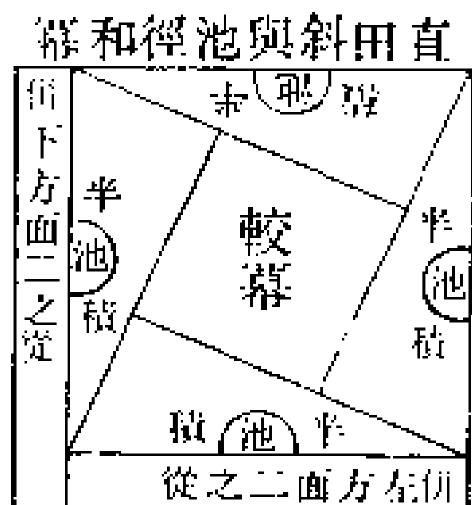

(c)


（d）

从这个解法的过程可以看出，天元术与现代列方程的步骤完全相同，只是符号和语言不同而已。也可以看出李冶的

小数记法是先进的。由位置来决定，纯粹小数前面加一个零，例如 0 𝍭即－0.5，和现代小数记法非常相近。

李冶还用图2—31那样的方式说明此问题的图解——演段术，使人们更容易理解。



2—31李冶“演段术”图

中外数学交流

在天元术发展的同时，中外数学交流加强了，特别是十三世纪前期和阿拉伯、波斯的交流尤为频繁。

1. 阿拉伯和波斯数学之传入我国。十三世纪五十年代初，成吉思汗的孙子蒙哥派旭烈兀西征时，蒙哥命旭烈兀把中亚著名科学家纳速拉丁·徒思(Nasir ed-din al-tûsi,公元1201—1274年）带回中国。但是，旭烈兀进入波斯以后并没将徒思送回中国，而是带他继续西征巴格达，不久又回到波斯。1258—1259年，在徒思的建议下，于塔夫里兹山麓的马拉加城建立了一座规模很大的天文台，徒思担任台长。徒思把古代希腊的许多科学著作译成阿拉伯文，并作了注解和增补。其中包括欧几里得的《几何原本》、《芬诺门纳》(Phaenomena)和《光学》，阿基米德的《测圆术》和《关于球和圆柱》，托勒密的《大集》，阿波罗尼的《圆锥曲线》和德阿多西阿的《圆球原本》。他自己也有关于比例理论和球面三角的论文。就在这时，“西域人”札马鲁丁等来到我国，很可能就是旭烈兀派回来的。

札马鲁丁是一位出色的天文学家，于至元四年（公元1267年）向忽必烈上《万年历》，同时制造七种阿拉伯天文仪器。1271年又在上都（在今内蒙古正蓝旗）建天文台，札马鲁丁为台长。在这座天文台中藏有大批阿拉伯文科学书籍。至元十年（公元1273年）登记的书中有“合用经书一百九十五部”。其中与天文数学有关的“回回书籍”有以下几种：

（1）兀忽列的四擘算法段数十五部。

（2）罕里速窟允解算法段目三部。

（3）撒唯那罕答昔牙诸般算法段目并议式十七部。

（4）麦者思的造司天仪式十五部。

（5）海牙剔穷历法段数七部。

（6）呵些必牙诸般算法八部。

（7）积尺诸家历四十八部。

（8）速瓦里可瓦乞必星纂四部。

（9）撒那的阿剌忒造浑仪香漏八部。

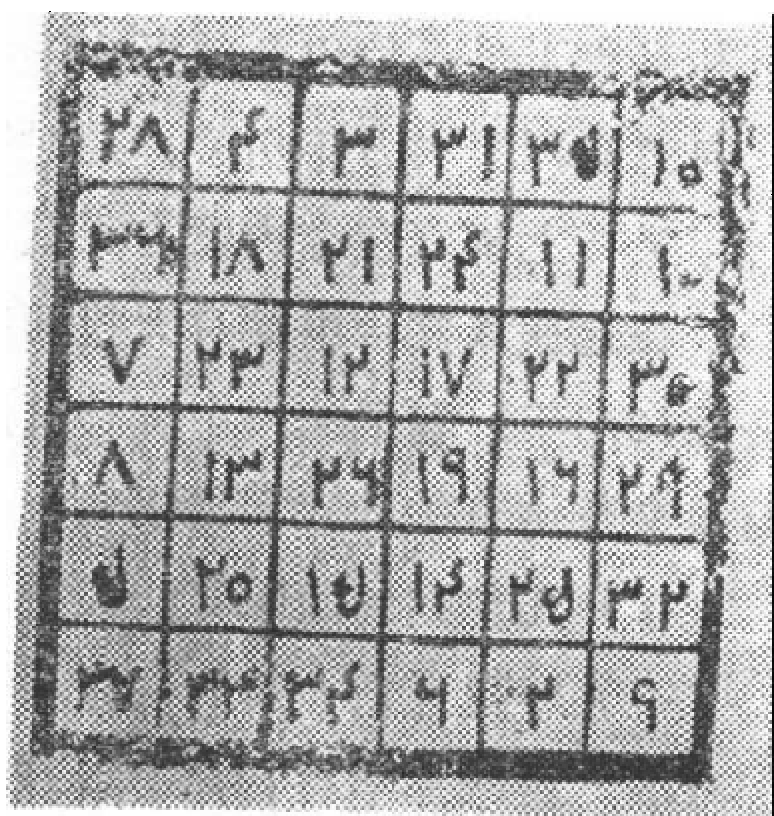
（10）黑牙里造香漏并诸般机巧二部。

还有些天文仪器和天文图①。这些阿拉伯文数学天文等书籍的来历，古书上没有明确记载。但从时间、内容和存放的地点来看，无疑是札马鲁丁带来的。书没有译成中文，上列的书名都是阿拉伯文的音译，其意义大多不太清楚。根据一些人的解释，第一种“兀忽列的”可能是Euclid（欧几里得）的最早译名，因此推测15卷本的《几何原本》已在十三世纪中期传入我国②。第三种“撒唯那罕答昔牙”是几何学的意思。第四

① 王士点、商企翁：《秘书监志》卷七。

② 严敦杰：《欧几里得几何原本元代输入中国说》，载《东方杂志》三十九卷十三号（1943）。

种“麦者思的”是Magest的音译。就是托勒密的《大集》①。这些阿拉伯文希腊科学著作，很有可能是徒思的译本。



2—32 元代铁板上的阿拉伯数码幻方

在此之前，我国首先接触希腊科学的人是蒙哥。据记载，“成吉思汗系诸王以蒙哥皇帝较有学识，彼知解说 Euclide 之若干图式”②。因此可以说蒙哥是我国第一个研究欧几里得《几何原本》的人。但是他没见过札马鲁丁。

印度—阿拉伯数码和阿拉伯幻方传入我国。1956年冬在陕西元代安西王府的旧址发掘出了五块铁板，上刻有六阶印度—阿拉伯数码的幻方（图2—32）。其意义和中国的“纵横图”相当。据《秘书监志》记载，至元十五年（公元1278年），札马

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

元代铁板上阿拉伯数码幻方今释

① 马坚：《元秘书监志“回回书籍”释义》，载《光明日报》1955年7月7日。

② 《多桑蒙古史》第四卷第五章，1962，中华书局，第91页底注。

鲁丁曾为安西王推算历法，同时还有天文台的其它三位官员“见习随侍”。这五块印度—阿拉伯文幻方，很可能就是札马鲁丁等人铸造的。1980年上海博物馆考古部在清理浦东陆家嘴明墓时发现元代的印度—阿拉伯数码的四阶幻方①，由1到16排成正方形，纵横各数之和均为34。各对角线的各数之和也是34，特别是具有全对称性。这比杨辉的“花十六图”更巧妙。

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

上海出土元代阿拉伯数码幻方今释

综上所述，十三世纪希腊和阿拉伯数学陆续传入我国，但是由于没有译成中文，所以流传不广，影响也不大。后来阿拉伯文书籍全部散失。

2．中国数学的外传。在外国数学传入我国的同时，我国的数学也传往外国。旭烈兀西征时就带上一批中国天文学家，随时给他推算历法和进行占卜。当旭烈兀支持纳速剌丁·徒思在马拉加建立天文台时，这些中国的天文学家也就留在那里和徒思一起工作。“其中最有名者为Fao-moun-dji博士，即当时人习称为先生(SingSing)者是已。纳速剌丁之能知中国纪元及其天文历数者，盖得于是人也。”②中国天文学传到了波斯，因此徒思对中国天文学和数学是颇为熟悉的。

① 《文汇报》，1980年12月16日。

② 《多桑蒙古史》第四卷第五章，1962，中华书局，第91页。

天文历法和水利工程中的数学

公元1279年，元世祖忽必烈统一全国后，开始着手在北京建立新天文台，任命王恂、郭守敬等领导天文研究工作。王恂（公元1235—1281年）是当时最著名的数学家，被誉为“以算术冠一时”的人物。郭守敬（公元1231—1316年），是卓越的水利专家和天文学家，曾进行过水利勘察和指挥水利工程。在王恂、郭守敬的主持下，于大都（今北京市）建成一座规模宏大、可与马拉加天文台媲美的天文台。郭守敬设计了将近二十种先进的天文仪器，进行了大规模天文观测。在实测的基础上，于1280年编订出历史上有名的《授时历》，次年颁行。

《授时历》中有不少创造性的成就，比如改进了黄赤交角，给出了相当于23°32′28″的精确结果，采用了365.2425日为一回归年。

过去的历法中都有一个虚设的“上元”，作为历法计算的起点，一般都是几千年或上万年以前的某年，计算起来很麻烦，《授时历》彻底不用了。同时指出，天体运行有自己的规律性，决不是“人为附会所能苟合”的。从此再没有人在历法中虚设上元。

1．三次内插法公式的创立。日、月和五大行星的视运行并不是匀速的。为了解决这类问题的有关计算，刘焯和张遂分别创立了等间距二次内插法公式和不等间距二次内插法公式。但是由于太阳等天体的视运行也不是匀加速度，而是处处改变的，因此用二次内插法公式计算天体逐日所行的距离（按度数计算）也仅是近似的。公元1171年，赵知微重修金杨级所造

《大明历》①时，第一次用到等间距三次内插法公式。王恂、郭守敬在《授时历》中应用较多。

赵知微《大明历》给出了一张“二十四气陟降及日出分”表②，用以说明二十四节气气初的日出时刻。这张数表是怎么造的，历史上没有详细记载。但是经过分析知道，数表中的“初末率”是用等间距二次内插法公式计算的。计算“陟降率”时必须用三次内插法公式，例如大雪气的“陟降率”为“降十一四十”，“四十”是小数部分，计算步骤为

$$1.2850\times15-\frac{14\times15}{2}\times0.0802-\frac{1}{6}\times15\times14\times13\times0.0010=19.2750-8.4210-0.4450=10.3990\approx10.40$$ ③

其中1.2850、0.0802和0.0010分别是一次差、二次差和三次差。按内插法公式，在计算上还应有一个首项$f(a)$。因为在这里它等于0，所以未出现。补上这一项，就是完整的等间距三次内插法公式了。

过了一百年，王恂、郭守敬编订《授时历》时，再次应用等间距三次内插法公式，比赵知微应用得更普遍。

《授时历》中有关太阳行度的盈缩“积差”、月亮运行度数和五星运动的计算，都用三次内插法。现以求太阳行度盈缩“积差”为例加以说明。

王恂等根据实测，知从冬至到春分太阳运行88.91日，即走完了一个象限（91.31度）。但是如果按太阳每日匀速运行度

---

① 与祖冲之所造历同名，而内容全不相同。

② 《金史·历志上》。

③ 严敦杰：《宋金元历法中的数学知识》，载《宋元数学史论文集》，1966年，科学出版社，第210—224页。

数计算，太阳在这段时间里多走了2.40度，这叫“盈积”。由春分到夏至，太阳要在93.71日才能走完，如按太阳每日匀速运行度数计算，就少走了2.40度，这叫“缩积”。由夏至到秋分，由秋分到冬至与上两段相反。他们把黄道的每一象限弧平分为六段，相当于六气，太阳在每个分点上的观测速度和平均速度从冬至起算之差（即盈、缩差）到每个分点的积累叫做“积差”。

在由冬至到春分的象限中，假定x是冬至后的日数，$f(x)$为x日的积差。王恂、郭守敬等在求$f(x)$时用到了相当于下面的三次函数

$$f(x)=ax+bx^2+cx^3$$

如果用日数x除两端，就有

$$\frac{f(x)}{x}=a+bx+cx^2$$

这就是“日平差”。其中a、b、c分别叫做“定差”、“平差”、“立差”。把日数x依次代入$f(x)$，则

$$f(0)=0$$

$$f(1)=a+b+c$$

$$f(2)=2a+4b+8c$$

$$f(3)=3a+9b+27c$$

$$f(4)=4a+16b+64c$$

……

又，《授时历》中已知$a=513.32$，$b=-2.46$，$c=-0.0031$。将这几个值代入上面的式子中，得到求冬至后每日“积差”的数表—“太阳盈初缩末限立成”，用阿拉伯数码改写如下：

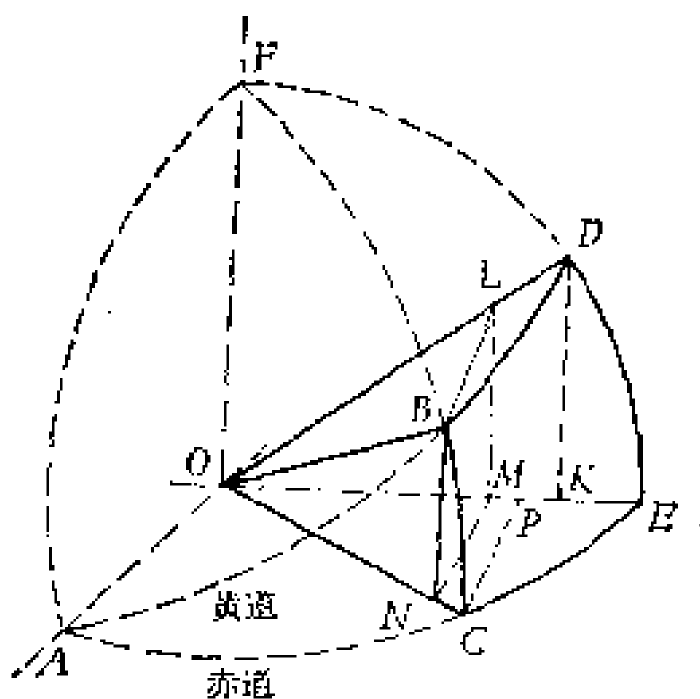
"积日" x	"积差" $f(x)$	一差	二差	三差	四差
初　日	0				
		510.8569			
第一日	510.8569		-4.9386		
		505.9183		-0.0186	
第二日	1016.7752		-4.9572		0
		500.9611		-0.0186	
第三日	1517.7363		-4.9758		0
		495.9853		-0.0186	
第四日	2013.7216		-4.9944		
		……		……	
……	……		……		0
		……		-0.0186	
第八十八日	24009.3568		-6.5754		
		5.0593			
第八十九日	24014.4161				

有了这个表求 $f(x)$ 很方便，只要加几次就可得到答案。如

求$f(2)$，把第五栏的三差－0.0186加到第四栏的二差－4.9572上得－4.9758。再把第四栏的二差－4.9572加到第三栏的一差505.9183上得500.9611。最后把第三栏的一差505.9183加到第一日的"积差" 510.8569上，即有$f(2)=1016.7752$。因为表中已给出了各日数的$f(x)$值，所以就不必再去加了，这里举例只是为了说明算法。

2. **赤道坐标与黄道坐标的换算**。一个天体在天空的位置由球面坐标来确定。我国古代主要是通过天文仪器直接测定出天体的赤道经度、赤道纬度、黄道经度和黄道纬度。到了元初，在《授时历》中首次采用坐标换算的办法解决太阳的赤道经度和赤道纬度的问题。

《授时历》中的问题是：已知太阳位置的"黄道积度"求"赤道积度"和"赤道内外度"。设A为春分点，D为夏至点，$\overset{\frown}{AD}$为黄道象限弧，$\overset{\frown}{AE}$为赤道象限弧，并设太阳运行到B点，那么$\overset{\frown}{BD}$为"黄道积度"，$\overset{\frown}{CE}$为"赤道积度"，$\overset{\frown}{BC}$为"赤道内外度"（图2—33）。王恂等得到相当于如下的两个公式：



2—33 球面割圆示意图

$$\overset{\frown}{CE}=p_2+\frac{v_2^2}{d} \quad (1)$$

$$\overset{\frown}{BC}=p_3+\frac{v_3^2}{d} \quad (2)$$

其中 $p_2=BN$，$v_2=CN$，$p_3=CP$，$v_3=PE$，d为赤道或黄道圆之直径，N、P分别为B、C向OC、OE所作垂线之垂足。

公式的具体求法是：

如图2—33在扇形ODE中，KE为半弧DE的矢，且设$KE=v$ $DK=p$，$OK=q$。求出$\overset{\frown}{BD}$的有关值，即$\overset{\frown}{BD}$之矢　$LD=v_1$，$\overset{\frown}{BC}$之半弦$LB=p_1$，$\overset{\frown}{BD}$上之余弦$OL=q_1$。因$LMNB$为平行四边形，则$MN=LB=p_1$，即$MN=p_1$。

因为$\triangle OLM\backsim\triangle ODK$，所以$LM:DK=OL:OD$，又因$BN=LM$，故有

$$BN=\frac{OL\cdot DK}{OD}$$

令$BN=p_2$，$OD=\frac{1}{2}d=r$，则$p_2=\frac{q_1p}{r}$

同理有　$w=\frac{q_1q}{r}$　　其中$w=r-ME$。

如设$ON=q_2$，在直角$\triangle OMN$中，就有

$$q_2=\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}$$

考虑半弧BC，$v_2=r-q_2$，根据沈括“会圆术”公式，就得到式（1）。

设$CP=p_3$，$OP=q_3$，$PE=v_3$，根据相似三角形对应边成比例的原理，有

$$p_3=\frac{rp_1}{\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}}$$

$$q_3=\frac{q_1q}{\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}}$$

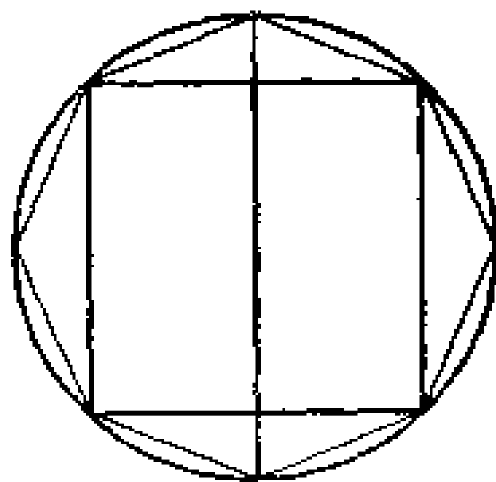
$$v_3=r-q_3$$

根据“会圆术”公式，就得公式（2）。

这个问题在现代天文学上相当于已知太阳位置的黄经余弧，求其赤经余弧和赤道纬度。从图2—33上可以看得很清楚。

在推求公式过程中，王恂等还用了贾宪的“增乘开方法”求出一个四次方程的一个正根，是这种方法的一次实际运用。理论与实际得到了结合。

3．赵友钦的平面割圆术。与郭守敬同时代或稍晚的科学家赵友钦，对于光学、天文学和数学都进行了研究，取得一些成就。他著的《革象新书》五卷，最末一卷“乾象周髀”内从周天的直径讨论圆周率问题。赵友钦对于古代的一些圆周率近似值如3，$\frac{157}{50}$，$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$等进行了比较，认为“圆径一尺而周圆三尺尚有余，围三尺而中径一尺为不足，盖围三尺径一尺是六角之田也。”“径一尺却是径少周多。径一百一十三而周围三百五十五最为精密”，然后他又用割圆术的方法证明$\frac{355}{113}$比其它圆周率近似值精密，其步骤与刘徽的基本一致，所不同的是赵友钦从圆内接正方形起算，然后逐渐倍增边数(图2—34)。一直求到圆内接正$16384=4\times 2^{12}$边形，得出周长为“三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇”。他在计算时，取直径为1000寸。如将其单位加以变更，则“降呼作三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，以一百一十三乘之，果得三百五十五尺”，也就是证得了$\pi\approx\frac{355}{113}$为最精密，他在天文计算中就是用的这个结果。



2—34 赵友钦割圆图

赵友钦也有了朴素的极限观念，他说：“围自四角之方增为八角曲圆，为第一次。若第二次则求为曲十六，第三次则求

为曲三十二，第四次则求为曲六十四。加一次，则曲必倍。至十二次则为曲一万六千三百八十四。其初之小方（即圆内接正方形），渐加渐展，渐满渐实。角数愈多而其为方者不复为方而为圆矣。”这就是说，当着圆内接正多边形的边数无限增加时，正多边形的极限就是圆。但是，赵友钦也认识到，虽然从“一、二次求至一十二次，可谓极其精密。若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”。就是人们可以继续求下去，而且不会求到头。这比刘徽的认识又前进了一步。

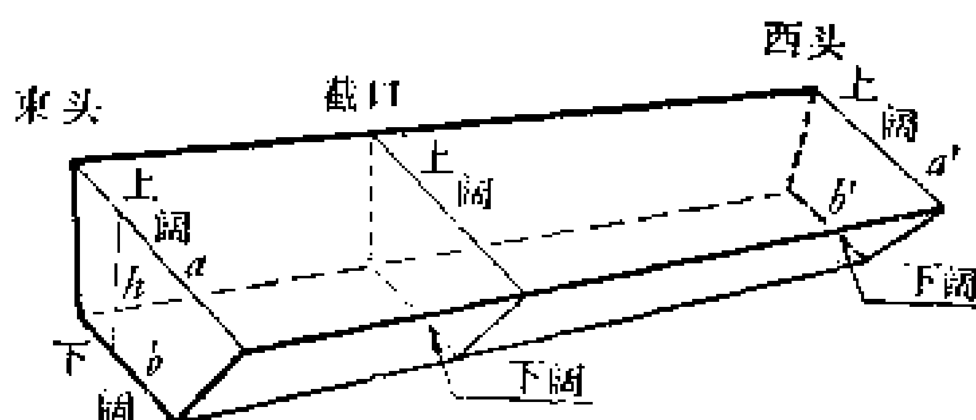
4．天元术在水利中的应用。宋金元时代兴修过许多水利工程，特别是由于黄河经常决口，人们通过堵口实践积累了丰富的治河经验。北宋科学家沈立写的《河防通议》一书，宋、金到元初都用它指导治河工程，而且形成不同的版本，内容也有增补。后来沙克什（又称瞻思公元1278—1351年）把两三种不同版本“合之为一”，又加以补充，于元至治元年（1321年）重订《河防通议》二卷。这本书中有一部分专讲算法，除一般的算术和简单几何问题外，还有一道题是用天元术解算的。

这道题的原文如下：

“假令开渠河一道，正长五百步，东头上阔一千单四十尺，下阔一千尺。西头上阔八百九十尺，下阔八百五十尺。同深一丈。总积二千三百六十二万五千（立方）尺，一百步取土，以四十尺为功，计五十九万单六百二十五功。今欲分一十四万四千四百五十功，问截长、阔多少。答曰：截长一百二十步，截阔九百单六尺〔截上阔九百二十六尺，截下阔八百八十六尺〕。”

把此题改为现在的说法就是：已知要开渠道的长为 l，东头上阔为 a，下阔为 b；西头上阔为 a'，下阔为 b'，深为 h，

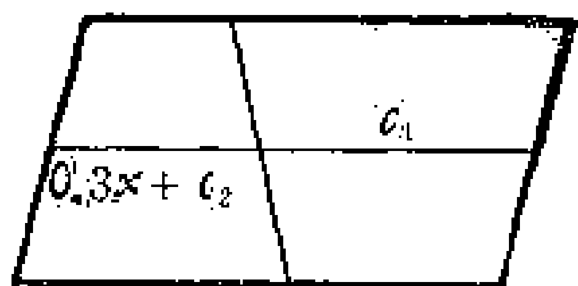
总共土方为V（=23625000立方尺）。将土送走一百步远，40立方尺为一“功”，合590625功。现在打算先做144450功，求这段渠道的长度和相截处的宽度（即梯形的中位线）。



2—35 《河防通议》“开渠”题示意图

沙克什先作了分析，东头的中位线$c_1=\dfrac{a+b}{2}$（叫做“停大阔”），西头的中位线$c_2=\dfrac{a'+b'}{2}$（叫做“停小阔”），$\dfrac{c_1-c_2}{l}=3$寸（0.3尺），即长变一步而截口中位线变3寸（“每步差”）。

然后沙克什用天元术求解如下（图2—36）：



2—36

设x为截长（“立天元一为截长”），以阔差0.3乘之，得$0.3x$，为“截停阔差”。$0.3x+c_2$就是“截停阔”，再加上c_1，于是有$0.3x+c_2+c_1=0.3x+1890$。这是截口的中位线和东头的中位线之和。用h乘之，则$h(0.3x+1890)=10(0.3x+1890)=3x+18900$（尺），再以截长$x$乘之，得$3x^2+18900x$。最后用5乘，得$15x^2+94500x$，为东段体积的二倍，“寄左”。然后把打算挖出的土方体积$144450\times40=5778000$再2倍之，得11556000，与“寄左”式相等，即

$$15x^2+94500x-11556000=0$$

解此二次方程得$x=120$尺，即为所求。

列方程步骤与李冶的完全一致，可见李冶和沙克什的天元术是一脉相承的。实际上，沙克什曾在李冶的家乡居住过，可能间接受过李冶的影响。

朱世杰的总结性成就

元代中国的数学，是继承了金和南宋的全部遗产而发展起来的。十三、四世纪之间的朱世杰则做了总结性的工作，取得了重大成就。

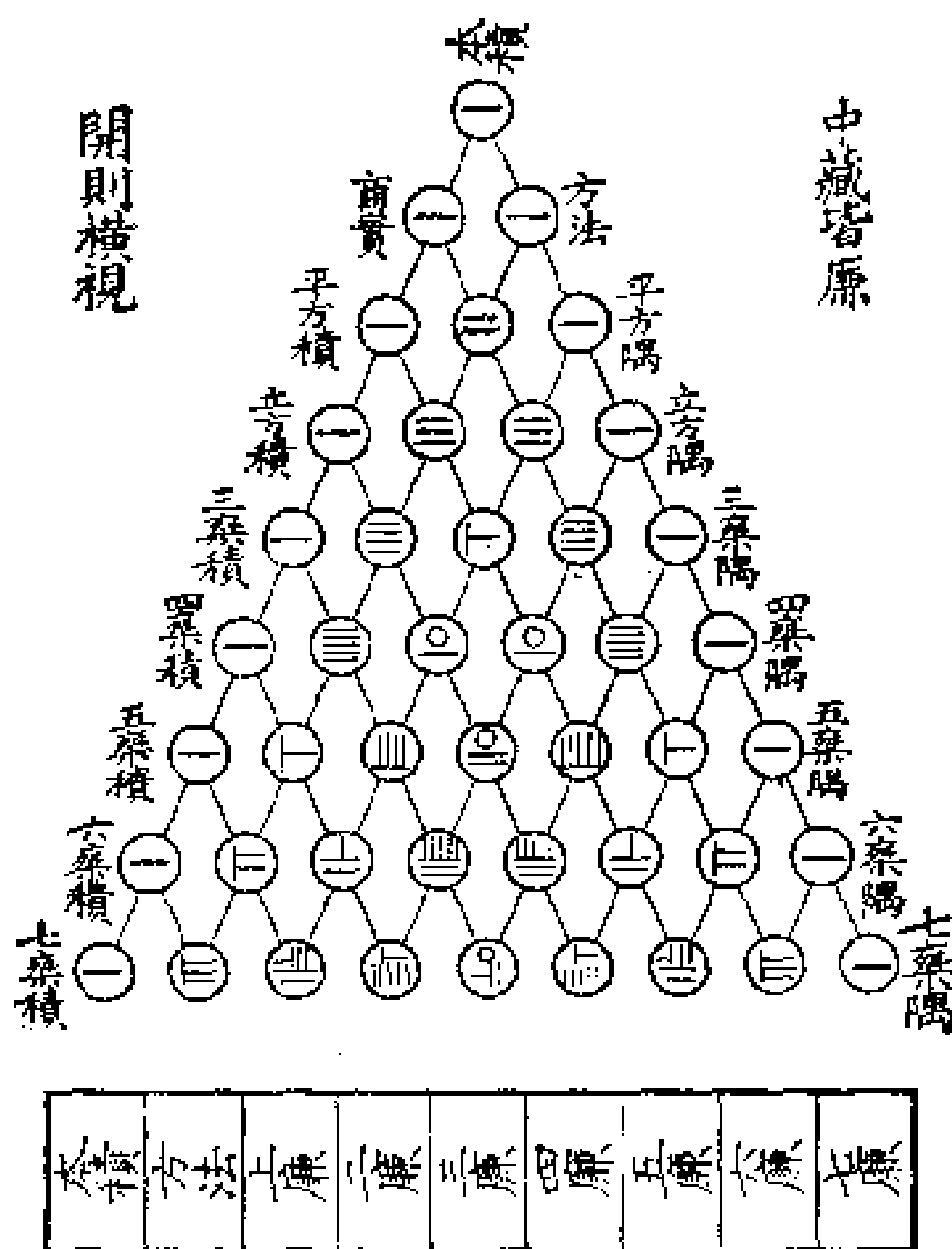
朱世杰，字汉卿，号松庭，寓居燕山（今北京市一带），是一位杰出的数学家和数学教育家。他精通《九章算术》，“旁通诸术”。到1303年时，他“以数学名家周游湖海二十余年矣，四方之来学者日众”，“复游广陵（今江苏扬州市），踵门而学者云集”。朱世杰一生从事数学教育和数学研究，孜孜不倦，刻苦钻研，做出了重要贡献。

1．集宋金元数学之大成。对朱世杰的数学工作，清代数学家罗士琳给了恰当的评价，他说：“汉卿在宋元间，与秦道古（秦九韶）、李仁卿（李冶）可称鼎足而三。道古正负开方，仁卿天元如积，皆足上下千古，汉卿又兼包众有，充类尽量，神而明之，尤超越乎秦、李之上”①。朱世杰于1299年编写了《算学启蒙》三卷，分20门，包括259题，书前有常用的数表和法则18项，叫做“总括”，为全书之纲。又于1303年完

① 罗士琳：《畴人传续编·朱世杰》。

成《四元玉鉴》三卷，分24门，包括288题，卷前有“今古开方会要之图”5幅和“四象细草假令之图”，讲述了四元术之基本原理。这些都是全书的预备知识。《算学启蒙》比较浅显，《四元玉鉴》则较为深奥，但两书互为表里，各有特点，都是我国古代的重要数学著作。

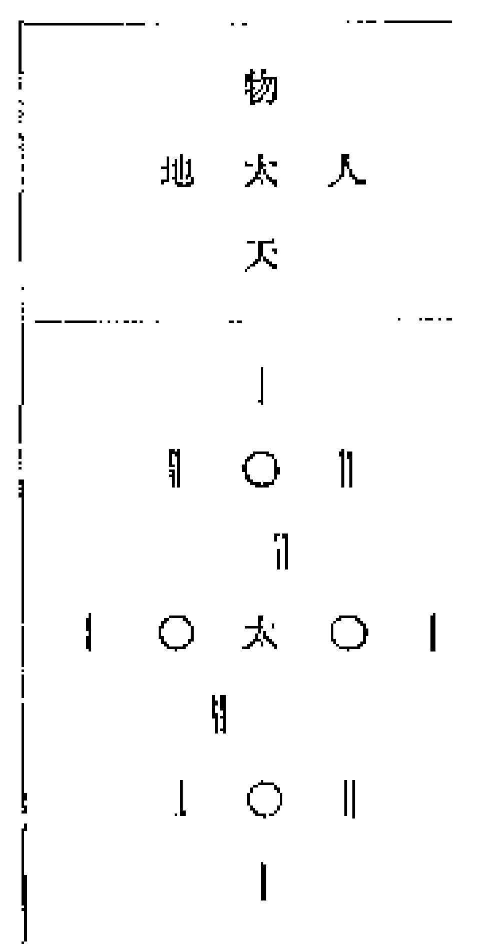
《算学启蒙》卷前之“总括”包括丰富的内容，开头是“释九数法”（九九口诀），其次是“九归除”：“一归如一进，见一进成十。二一添作五，逢二进成十，三一三十一，三二六十二，逢三进成十，……”和后来的珠算口诀差不多。此外，还总结了其它各种口诀、度量衡换算和进位制。“明正负



2—37 “古法七乘方图”

术”一项讲正负数加减法则，一共八条，比《九章算术》更加明确。在“明乘除段”中有“同名相乘为正，异名相乘为负”之句，也就是$(\pm a)\times(\pm b)=+ab$，$(\pm a)\times(\mp b)=-ab$这样的正负数乘法法则，是我国最早的记载。

《四元玉鉴》卷前的“今古开方会要之图”是关于开方的图解法，其中“古法七乘方图”(图2—37)是宋代贾宪“开方作法本源”图的推广。这里已展到八次方（七乘），即$(a+b)^0$到$(a+b)^8$的展开式系数全部求出，即称“古法”，可能是前人作的。“四象细草假令之图”是把天元术（一个未知数的代数）一步一步地推广到了四元术（四个未知数的代数）。据莫若在《四元玉鉴前序》中所说的四元术是：“其法以元气（常数项）居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上”，各未知数的排列如右上图那样。但在筹式中只写各项的系数，而不写元，例如方程

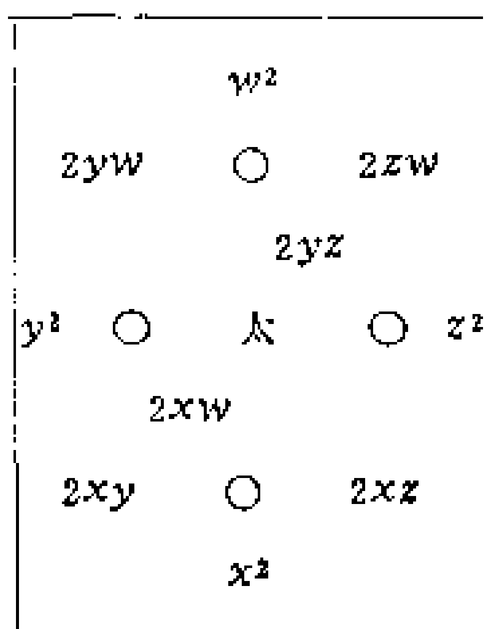


$$x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz$$
$$+2yz+2yw+2xyz+2yzw=0$$

其中x、y、z、w相当于天、地、人、物四元。当时的记法如右下图。改为现代符号相当于下页之图。

朱世杰的四元术是在前人研究成果的基础上总结出来的，在他以前，李德载在所作《两仪群英集臻》中除天元之外，还“兼有地元”，有了两个未知数的表示法。刘大鉴编的《乾坤括囊》一书，书末有“人元二问”，即在天元、地元之外又增加了人元，扩充到三个未知数。由三

元到四元这一步是由朱世杰完成的。正如他的一位朋友祖颐所说的："吾友燕山朱汉卿先生，演数有年，探三才之颐，索《九章》之隐，按天、地、人、物立成四元，以元气居中"①，这就是四元术。



朱世杰对于高阶等差级数、内插法、方程等都有重要贡献，将在下面分别介绍。

2．用四元术解方程。《四元玉鉴》这部书的主要内容之一是解方程，从一元到四元的都有。不过这本书只有解题方法，没有详细演草，因此演算过程不清楚。罗士琳补充了细草。下面参照罗士琳的细草，举例说明朱世杰用四元术解方程的基本内容。

《四元玉鉴》卷首的"四象细草假令"中的"三才运元"一题："今有股弦较除弦和和与直积等，只云句（勾）弦较除弦较和与句同，问弦几何？答曰五步。"这是一个三元问题。朱世杰的解法是：立天元一为句（x），地元一为股（y），人元一为弦（z），三才相配，于是

求得今式

丨̸	太	丨̸
	[illegible]	
丨̸	○	丨̸

求得云式

丨̸	太	丨̸
	丨	丨
	丨̸	

求得三元之式

丨	○	太	○	丨
		○		

这三个筹式相当于下面的三元方程组：

① 祖颐：《四元玉鉴后序》。

$$\begin{cases} -x-y-z-xy^2+xyz=0 \text{（“今式”）} \\ x-y-z-x^2+xz=0 \text{（“云式”）} \\ x^2+y^2-z^2=0 \text{（“三元之式”）} \end{cases}$$

“以云式剔而消之，二式皆人易天位，

前得　太

后得　太

”。

这是朱世杰的原话，不易理解，现取钱宝琮的解释如下①：把“云式”和“三元之式”分别改为

$$y=-x^2+x+xz-z, \qquad (A)$$

$$y^2=z^2-x^2 \qquad (B)$$

将(A)、(B)代入“今式”，稍加整理并写成

$$(-z+1)x^2+(z^2+z+1)x+(-2z^2-z-2)=0 \qquad (C)$$

将其写成筹式，按顺时针方向旋转90°就得朱世杰的“前式”。又将(A)两边平方，再与(B)相减，加以整理写成

$$x^3+(-2z-2)x^2+(z^2+4z+2)x$$
$$+(-2z^2-2z)=0 \qquad (D)$$

将其写成筹式，按顺时针方向旋转90°，便得朱世杰的“后式”。

为了消去x，将(C)、(D)两式加以改变：以x乘(C)式，$(-z+1)$乘(D)式，两式相减得

$$(z^2-z-3)x^2+(-z^3-z^2+3z+4)x$$
$$+2z^3-2z=0 \qquad (E)$$

① 钱宝琮：《中国数学史话》，1957，中国青年出版社，第128—131页。

再以 z 乘(C)式，然后与(E)式相加，得

$$-3x^2+(4z+4)x-z^2-4z=0 \qquad (F)$$

以$(-z+1)$乘(F)式，以 3 乘(C)式，相加，得

$$(-z^2+3z+7)x+z^3-3z^2-7z-6=0 \qquad (G)$$

以$(-z^2+3z+7)$乘(C)式，以$(-z+1)x$乘(G)式，相减，得

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+2z^4-5z^3-15z^2$$
$$-13z-14=0 \qquad (H)$$

最后的两个式子(G)、(H)，朱世杰分别称为“左式”和“右式”，并记作

左式：　太

右式：　太

左式的右行和右式的左行，朱世杰称为“内行”，其余两行称为“外行”。内二行相乘，经整理得

$$-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78=0 \qquad (I)$$

外二行相乘，经整理得

$$-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98=0 \qquad (J)$$

两式相减，再用四除，最后得

$$z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0 \qquad (K)$$

解此四次方程，得正根 $z=5$，即为所求。

从上边的例子可以看出朱世杰用天、地、人元解方程的大体过程。关于四元的情况，也可以用同样的思想去理解。

3．高阶等差级数与内插法。朱世杰在高阶等差级数和内插法方面也取得了重要成就。他在沈括、杨辉和王恂等人的基础上，把级数和内插法向前推进了一大步。在《算学启蒙》和

《四元玉鉴》两书中有一大批这样问题：已知各种垛积的物体的总数，求垛积底层物体的个数。这类问题的解决，须先知道级数求和公式，然后才能反求底层物体的个数。关于求和公式有下面一组：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2!}n(n+1)\text{①},$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2!}n(n+1)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)\text{②},$$

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)\text{③},$$

$$1+5+15+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\text{④},$$

$$1+6+21+\cdots+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+5)\text{⑤}。$$

这组公式中的第一、第二两式早已有之，特别重要的是这些公式之间有着密切的联系。前一公式的和是后一公式的通项，例如第一个级数的和$\frac{1}{2!}n(n+1)$，当$n=1,2,3,\cdots n$时，就构成了第二个级数。这些公式可以归纳成下面的一般形式（可以叫“朱世杰等式”）：

---

① 《算学启蒙·堆积还原门》第1、3问，《四元玉鉴·茭草形段门》第6、7问等。

② 《算学启蒙·堆积还原门》第4、11、14问，《四元玉鉴·果垛叠藏门》第1、第14—20问等。

③ 《四元玉鉴·茭草形段门》第2问，“如象招数门”第2、3、5问。

④ 《四元玉鉴·茭草形段门》第4问，“如象招数门”第5问。

⑤ 《四元玉鉴·果垛叠藏门》第6问。

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$①

当$p=1,2,\cdots 5$时就得到上面的五个公式。

还要注意到：第一个级数相邻两项之差都等于1；第二个级数相邻两项之差依次为1,2,3,…,再减一次也都变成1；第三个级数相邻两项的三次差都变成1，等等。因此它们分别是一阶等差级数，二阶等差级数……

此外，朱世杰还研究过其它形式的级数求和问题，这里不再列举。中世纪时期，印度和阿拉伯数学家曾求得不少级数求和公式，其中有些和我国杨辉、朱世杰等的公式相当。

《四元玉鉴》中卷"如象招数门"主要是讲招差术，实际上也是属于高阶等差级数问题，但其求和是通过招差公式，即内插法公式进行的。其中最后一题自注非常典型："今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵，今招一十五方，每人日支钱二百五十文，问兵及支钱各几何。答曰：兵二万三千四百人，钱二万三千四百六十二贯。"

招兵的人数以立方计算，也就是第一次招兵$3^3=27$人，第二次招$(3+1)^3=4^3=64$人，就这样一直招到第十五次，即$(3+14)^3=17^3$，十五次共招兵

$$S=3^3+4^3+\cdots+17^3$$

直接求和，要进行大量的乘方计算，朱世杰没有采用这个方法，而是利用招差公式求出招兵总数。我们把朱世杰的叙述写为现代形式的数表如下：

① 钱宝琮：《朱世杰垛积术广义》，《学艺》第四卷第七号（1923），第1—9页。

日次	累日共招兵人数	每日招兵人数（上差，Δ）	二差，Δ^2	三差，Δ^3	四差，Δ^4
		$3^3=27$			
1（初日）	27		37		
		$4^3=64$		24	
2（二日）	91		61		6
		$5^3=125$		30	
3（三日）	216		91		6
		$6^3=216$		36	
4（四日）	432		127		
		$7^3=343$			
5（五日）	775				
		…	…	…	…
…	…				

四次差相等，五次差就为零了。一次差到四次差分别与n、$\frac{1}{2!}n(n-1)$、$\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$、$\frac{1}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)$对应相乘，再相加，就得到前$n$次共招兵人数$f(n)$的朱世杰计算公式：

$$f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4$$

这就是四次等间距内插法公式，和现代公式基本一致。建议称此式为“朱世杰内插法公式”。

第 三 章

元代后期到清代中期

（公元十四世纪初期到十九世纪中期）

朱世杰以后（即十四世纪初以后），直到清朝中期，约近五个半世纪。在此期间，虽然我国已经有了资本主义萌芽，商业数学得到普及（特别是珠算），西方初等数学的传入，康熙皇帝对数学的重视，以及梅文鼎、年希尧、明安图、汪莱、李锐等数学家的工作，取得了一些成就，但是发展不快，尤其是和当时欧洲的数学相比更是远远地落后了。十八世纪中期到十九世纪中期，在复古思潮的影响下以及其它一些原因，不少学者（如戴震等）致力发掘和整理古代数学著作，很少创新。

第一节 商业数学的发展与西方初等数学的传入

商业数学的发展

从朱世杰以后到明代末年即到十七世纪初年，这个时期，

我国的数学有明显的特点，主要是高深的理论研究几乎完全停止，而日常应用的算术和珠算得到普及，并形成口诀化。这与当时商业等的广泛社会需要有密切关系。

1．**生产力的提高与科学技术的发展**。从十四世纪初到十七世纪初的三百年里，我国的生产力有很大的提高，手工业、航海、海外贸易等远超前代。当时，冶金、陶瓷、纺织等方面的生产技术都领先于世界。榨油、制糖、制革、造纸、酿造等都很发达。明永乐三年到宣德八年（即公元1405—1433年）的二十八年中，明朝派郑和等率大型船队七次出使南洋、印度、阿拉伯和东非各国。这个船队中最大的船，长四十四丈，宽十八丈。我国的许多手工业产品和土特产品大量远销东南亚和印度洋沿岸国家；同时外国商品也不断进入我国沿海各地和内地大城市。郑和下西洋的规模之大，时间之早，超过了世界上有名的哥伦布（C．Columbus，公元1451—1506年）1492年横渡大西洋的航行。内河航运也很发达，当时仅浙江一带的江船就多达“以万亿计”。

生产技术的发展推动了科学的进步。明代在地理学、医药学、物理学、农业科学、化学等许多方面都有重要成就，出现了李时珍、周述学、宋应星、徐霞客、徐光启等科学家；完成了《本草纲目》、《天工开物》、《农政全书》等重要科学著作。从十六世纪中期到十八世纪中期，形成了我国科学发展的小高峰。

2．**商业数学的普及**。由于商业的发展，相应的数学知识广泛地受到重视。元明时代出版了不少数学书，内容虽然大都比较浅显，然而却适合商业的要求。其特点之一是口诀化。以前已经有了的数学口诀，在这个时期发展得特别快，如元末贾亨

的《算法全能集》、何平子的《详明算法》等都是口诀化数学书的代表作。当时的一些数学书，商业味道很浓，如元代丁巨的《丁巨算法》（1355）中大部分算题与商业有密切关系。明代吴敬的《九章算法比类大全》和程大位的《算法统宗》也具有代表性。当时的一些商人对于数学很感兴趣，程大位本人就是商人。他“少游吴楚”，在长江中下游为商，晚年则从事数学研究。

吴敬生活在当时商业发达的钱塘（今杭州市）。他的《九章算法比类大全》十卷，是花了十年的时间整理、研究，于1450年完成的。吴敬是当时钱塘一带有名的数学家，因此一时许多官吏，“皆礼遇而信托之”。请他解决各种数学问题，这些问题成为他数学研究的重要内容，很可能把其中的一部分收入了《九章算法比类大全》内。



吴　敬

《九章算法比类大全》中关于商业的算题很多，包括合伙经营、商品交换等等。如“今有罗、绢二十三匹〔匹法四丈〕，共卖钱一百六十八贯，只云罗四尺与绢九尺共价适等。又云绢一尺比云罗一尺少一百五十六贯，问罗、绢各多少尺，每尺各多少钱？”又如“今有铜四万六百五十斤，每斤价钱二贯八十文，问一共多少钱？”以乘法计算得84552贯。在卷第十的“今有唇底相登的四隅垛”问题中，提到“和酒”、“常酒”和小瓶酒三种酒。酒的种类有了增加，而且数量很大。《算法

统宗》更是典型。

《九章算法比类大全》中还有一种“写算”乘法（图3－1）是这以前我国数学书中从未见过的算法。它是先画一些方格，格的多少根据数字位数的多少来确定，选择一个方向画上每个方格的一个对角线。计算时先将被乘数横写于方格顶上，乘数写于方格右侧。都是每一个方格外写一个数字。每两个数字乘得的结果按十位与个位填写于对应方格对角线之上下，再按对角线斜行相加。空位不写字。例如306984×260375＝79930959000（原书上的数字都是汉文），计算如上面的方格。在《算法统宗》里也有类似的算法，程大位叫它“铺地锦”。这种算法，当时在欧洲、印度、阿拉伯、中亚等广大地区非常流行，因而有更多的机会传入我国。

	3		6	9	8	4	
	/6		1/2	1/8	1/6	/8	2
7	1/8		3/6	5/4	4/8	2/4	6
9							
9	/9		1/8	2/7	2/4	1/2	3
3	2/1		1/2	6/3	5/6	2/8	7
	1/5		3/	4/5	4/	2/	5
	9	5	9				

3－1　“写算”乘法图

《九章算法比类大全》成书后二十八年，即1478年，在意大利的特雷维沙（Treviso）出版了第一本西方商业数学①。其中许多算法、名称与《九章算法比类大全》非常相似。但是，两者可能没有因袭关系，而是各自独立写成的。这个事实充分说明，中西资本主义萌芽时期商业活动在数学中的反映是一致

① D.E.Smith, A Source book in Mathematics, Vol. I, 1959, PP. 1—12

的。

3．珠算的产生与发展。珠算是我国人民的一项有实用价值的发明创造，长期以来深受人们的欢迎，至今仍在使用。珠算是什么时候发明的？这个问题历来说法不一，其实它是古代筹算逐渐演变的结果，很难说出发明的确切时间和发明者。据现有的资料来看，珠算大约发明于宋元时代。它所用的口诀，在宋元间已经具备，为珠算的使用和流传创造了先决条件。

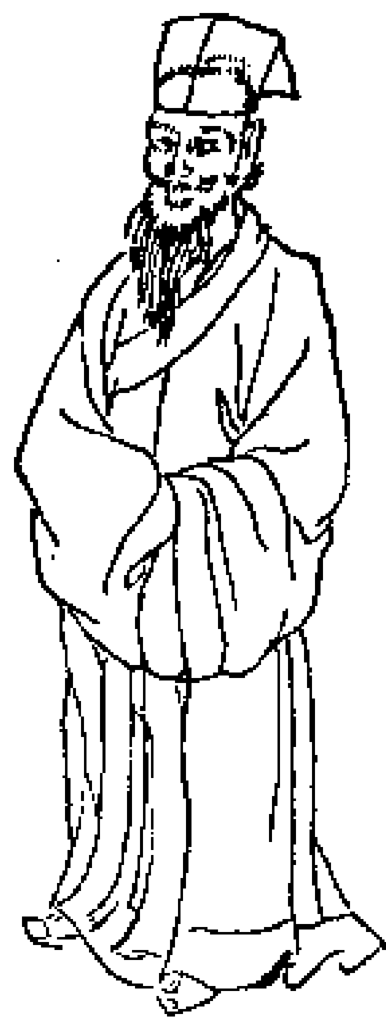
元末陶宗仪在所作《南村辍耕录》卷二十九中有一条记载说："凡纳婢仆，初来时曰擂盘珠，言不拨自动。稍久曰算盘珠，言拨之则动。既久曰佛顶珠，言终日凝然，虽拨亦不动。此虽俗谚，实切事情。"古代的筹算也有算盘，所用工具是算筹，不能称"珠"，也不能拨，因此陶宗仪所说的"算盘珠"决不是筹算，而是珠算。可见至迟在元代珠算已有某种程度的普及。明代的许多书中提到了珠算。其中最早是洪武四年（公元1371年）刊本《魁本对相四言杂字》中明确讲到了算盘，里面还有一幅珠算的算盘图。

《魁本对相四言杂字》是一本很浅的看图识字性质的书，可见珠算在当时已很普及。

十五世纪中期在一本木工手册《鲁班木经》中已规定了制造珠算盘的具体规格："算盘式：一尺二寸长，四寸二分大。框六分厚，九分大，起碗底。线上二子，一寸一分；线下五子，三寸一分。长短大小，看子而做。"这时珠算盘没有横梁，用一线相隔，上二子下五子，还带有早期的性质。这里把算盘珠叫做算盘子。1524年，王文素在《算学宝鉴》卷五中说："众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便，既乘已毕，只动一子居下，余仍如故"，也指珠算。

当时已出现了打算盘能手。明代著名学者唐顺之（公元1507—1560年）就是代表。“唐顺之至庐州，适府有算粮事，唐子乃索善算者十余人，人各与一数，算讫记其概只数字，凡三四易，自拨盘珠，每一数字亦只记数字，不移时而一府钱粮数目清矣。老书、算，咸精其神速”。① 这反映了珠算在会计方面的威力和唐顺之精于珠算的情况。

十六、十七世纪间有关珠算的书籍，有些已经失传，流传至今的有徐心鲁的《盘珠算法》（公元1573年）、柯尚迁的《数学通轨》（公元1578年）、朱载堉的《算学新说》（公元1584年）、程大位的《算法统宗》（公元1592年）和黄龙吟的《算法指南》（公元1604年）等。这些书中所载的算盘图都已有了固定的横梁，比用线隔开的办法有所改进。


程大位

在上列诸书中，以《算法统宗》流传最广，影响最大，出版以后翻印本、改编本均有多种，长时间内成为学习珠算的入门书。这部书共有十七卷，包括算盘图式、珠算口诀和用珠算解决问题。其中关于蝉联算法（珠算开方）是程大位首先提出来的。在书的最末附有一篇“算经源流”，记载了宋元以来刻本数学书五十一种。因其中大部分都已失传，所以这一附录便成了宝贵的数学史料。

明代珠算的大普及是明代商业贸易发

① 姚之骃：《元明事类钞》卷十八。

展的结果。那时商业上的计算不需要高深的理论，而重复的四则计算则是大量的，珠算正适合于这种需要。因此，珠算的普及具有时代的特征。

另外，王文素、程大位还对纵横图进行过研究，并且取得了一些成果。

西方数学的传入

珠算只是满足了社会上的一般要求，不能适应科学技术发展的更高需要。另外，当时围绕着天文历法和其它方面进行着激烈的斗争，数学界也有不同观点的辩论。这一点和同时代西方的情况很相似。但也正是在这时，西方数学传到了我国。

1．围绕历法改革的斗争和数学中不同观点的论述。明代在科学领域的斗争是很激烈的，首先表现在改历问题上。明初把元《授时历》稍加改编而成《大统历》，直到十六世纪已经二百多年，没有进行重大改革。《授时历》虽是一部好历法，但因时间长了，误差越来越大。早在景泰元年（公元1450年）正月辛卯，卯正三刻月食，司天监误推为“辰初初刻”。成化十五年（公元1479年）十一月戊戌望，“月食，监推又误”，本来是由于历法本身的不精确造成的，但“帝（成化皇帝）以天象微渺，不之罪也”。与此相反，主张改革历法的人却被囚禁，如成化十七年（公元1481年）真定教谕俞正己由于提出改革历法的建议，结果以所谓“轻率狂妄”之名被投入监狱。成化十九年，司天监天生张陞又提出改历的建议，司天监又以

“祖制不可变”为由拒不采纳①。之后，司天监所预报的日月食，一直是屡屡不准，但改历的倡议，均遭排斥。斗争也一直未停。

在数学方面，也存在着不同的观点，例如有关数学起源的问题，数学和社会实践关系的问题等都是人们非常关心的问题。明代数学家多数都在自己的著作中提到“隶首作数”的说法，或是认为数学起源于“河图洛书”。程大位在这方面很突出，他在所著《算法统宗》一书中，开头就说“河图洛书”是数学的“本原”，同时画了一幅“龙马负图”图。这些看法不仅没有根据，而且把数学起源问题神秘化了。

但是，也有坚持正确看法的学者，其中周述学可为代表者。他提出了符合唯物主义观点的“名数御量”说，对于数学的起源、数学与实践的关系有比较明确的认识。他在《神道大编历宗算会》中写道：“夫物之不齐，物之情也。故其形体有长有短，有广有狭，有多有寡，有轻有重。是以立数名以御之：度之以弓尺，而长短广狭明；量之以斗斛，而多寡审；权之以斤秤，而轻重析。此度、量、权三法为数之纲也。”这就是说，数学起源于度、量、权这三个方面的实际需要，它们是人们生产、生活上必需的三种基本数量关系。在周述学看来，物质有数量关系的属性，由于人的实际需要才“立法名数御之”，于是产生了数学。对数学认识得如此正确的数学家，在当时是极少见的。

2．早期西方数学传入我国的经过。当时虽然珠算已经普及，在社会上起了极大的作用，但是数学理论研究则远不如宋

① 《明史》卷三十一“历志一”。

元时代。然而有些问题的解决没有较高的数学水平是不行的，如历法改革就需要丰富的数学知识。正在这时，西方的初等数学传到我国，其中有的就是伴随着天文历法传入的。

十五、十六世纪期间，西方处于资产阶级革命的前夕。一些国家为了寻找贸易市场和原料基地，便派传教士到东方来。来我国的传教士中，早期影响最大的为利玛窦。

利玛窦（Matteo Ricci，公元1552—1610年），意大利人，德国著名数学家克拉维斯（C.Clavius，公元1537—1612年）的学生。他于明万历十年（公元1582年）来到我国，带来一些西方的科学技术成果，如世界地图、自鸣钟、数学书籍等。

利玛窦之后，又有龙华民（Nicolaus Longobardi，公元1559—1654年）、邓玉函（Jean Terrenz，公元1576—1630年）、汤若望（Jean Adam Schall Von Bell，公元1591—1666年）、罗雅谷（Jacgues Rho，公元1593—1638年）、熊三拔（Sabathin de Ursis，公元1575—1620年）、庞迪峨（Didace de Pantoja，公元1571—1618年）等等，陆续来到我国。这些传教士大都精通天文学。

当时我国正处在历法需要改革的关键时期。万历三十八年（公元1610年）十一月朔日食，“历官推算多谬，朝议将修改”，第二年五月周子愚便趁机把庞迪峨、熊三拔等推荐给朝廷，建议让他们参加历法改革。这事后来得到市民阶层出身的科学家徐光启（公元1562—1633年）、李之藻（公元1565—1630年）、李天经（公元1579—1659年）等人的有力支持。他们抵制反对改历的各种意见，终于从崇祯二年（公元1629年）开始进行改历工作。在徐光启等人的主持下编译西方的天文历法和数学书。到崇祯七年（公元1634年）共完成一百三十七卷，名

为《崇祯历书》。入清以后，汤若望掌管钦天监，于顺治二年（公元1645年）将其修正改称《西洋新法历书》。

徐光启是我国十六、十七世纪间著名的科学家。他早在改历之前就已与利玛窦合译欧几里得《几何原本》前六卷和《测量全义》等书；又自著《测量异同》、《勾股义》等书。他对于明代数学理论发展的落后状态提出了自己的看法，认为这是由于“其一为名理之儒，土苴天下之事实；其一为妖妄之术，谬言数有神理”所造成的。“名理之儒”和“妖妄之术”确实是阻碍数学发展的两个主要原因。徐光启一方面赞扬《几何原本》中逻辑推理的严谨性，并试图用这种思想解决我国古代数学的问题；另一方面又很注意数学在社会实践中的应用，特别提出了由数学推出的结论“不验不用”的主张，提出数学要受实践的检验，经过检验才能判明其真理性。这些看法都是正确的。他虽然在数学上很少创造性的成果，但是积极吸收西方的数学，对我国数学的发展也起了不小的作用。


徐光启

3．笔算的传入。在我国历史上，外国笔算曾几次传入我国，可是没有推广使用。利玛窦来我国时带来一部笔算著作，是他的老师克拉维斯编的《实用算术概论》。他与李之藻参考

《算法统宗》进行了编译，完成《同文算指前编》、《同文算指通编》和《同文算指别编》。这是我国第一部系统介绍欧洲笔算的数学书。它对我国影响很大。

《前编》二卷，讲述自然数、小数的算术四则运算。书的开头评论了古代的筹算和当时流行的珠算，然后指出："兹以书代珠，始于一究于九，随其所得而书识之，满一十则不书十，书一于左，进位，乃作〇于本位，一〇日一十。由十进百、由百进千、由千进万皆仿此。"这就是笔算进位方法，和现行的完全一致。

《通编》八卷，讲述用笔算解比例、盈不足、开方、级数、方程等问题。其中许多例题是编译时从其它数学书中选取而补进去的。比例问题，《前编》叫做"三率准测法"，相当于我国古代的"今有术"。

《别编》不分卷，只有"测圆诸术"，内容很少。综观全书，数学内容都比较浅显，没有超出我国的水平。其中有些算法相当繁琐，如验算法是从土盘算法①演变而来的，不适合于笔算，因此后来被淘汰。

与此同时还翻译了一部叫做《欧罗巴西镜录》的算术书。因为没有刊本，所以目前只有孤抄本保存在北京大学图书馆。

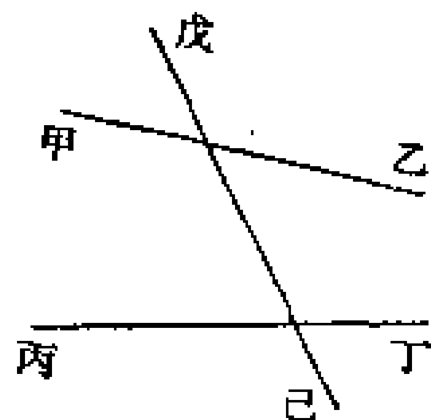
4．几何知识的传入。西方的几何知识虽然在元代曾传入我国，但是没有产生多大影响。明末时再次传入，如前已提到的欧几里得《几何原本》的翻译问题。原书十五卷，徐光启和利玛窦合译了前六卷。"几何"一词就是翻译时徐光启加上的

---

① 中世纪时在印度、阿拉伯和中亚等地流行的一种算法，因其将细沙撒在地上或盘上以竹棍或铁棍进行计算，故名土盘算法。

(但不是"Geometry"的音译)。后来一直这样沿用。

这部书是用形式逻辑的方法把已有的(指古代希腊)几何知识建立了最初的体系。在卷一之前给出了"界说三十六"、"求作四"和"公论十九",相当于现在所说的定义、作图公法和公理,作为全书推理的基础。如按现代数学观点来看,其逻辑结构自然不够严谨,然而在两千多年前可以说是不错了。现将其中第十一公论(即公理)叙述如下:如图3—2,有二横直线或正或偏,任加一纵线,若三线之间同方两角小于两直角,则此二横直线愈长愈相近必至相遇。这是数学史上有名的"第五公设",它与平行公理等价,现已由平行公理所代替。第五公设在初等几何中具有特征的性质。所谓欧几里得体系实际就是指采用这条公设或与它等价的命题建立起来的几何系统(当然是要保留其它初等几何公理)。因此它是十分重要的。



3—2 《几何原本》中第十一公论图

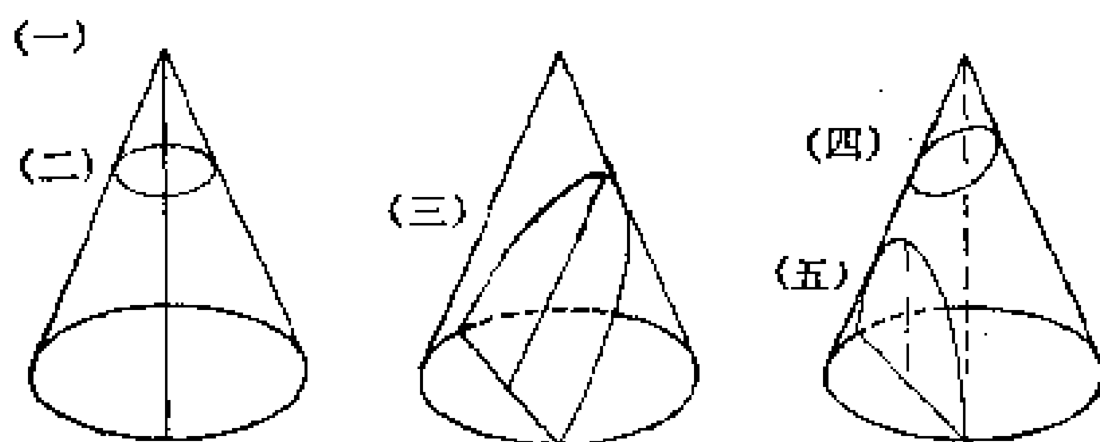
徐光启对《几何原本》的逻辑结构称赞不已,评价很高。他指出:"此书有四不必:不必疑,不必揣,不必试,不必改。有四不可得:欲脱之不可得,欲驳之不可得,欲减之不可得,欲前后更置之不可得。有三至三能:似至晦实至明,故能以其明明他物之至晦;似至繁实至简,故能以其简简他物之至繁;似至难实至易,故能以其易易他物之至难。易生于简,简生于明,综其妙在明而已。"① 这里所说的,虽不免有些夸大,但却反映出当时徐光启对于数学逻辑系统的认识。

① 徐光启:《几何原本杂义》。

《几何原本》前六卷的内容包括三角形、圆、多边形、算术比例和线段比例及有关问题。很显然，所讨论的仅是平面几何的一部分，立体几何全无涉及。

这部书出版后不久，在我国又出现了几个简本，如《几何体论》、《几何用法》（公元1608年）、《几何要法》（公元1631年）等。前两书为孙元化（公元？—1632年）所作；后一书题“艾儒略（Juies Aleni，公元1582—1649年）口述，海虞瞿式耜笔受”，郑洪猷1631年序①。

在《崇祯历书》中也有一些几何学内容。其中讲几何最多的是《测量全义》，全书共十卷，第五、六两卷属于几何的内容不少。第五卷主要介绍古希腊科学家阿基米德、帕普士（Pappus，公元4世纪人）等人的几何学研究成果，如割圆术、圆周率、圆面积、计算三角形面积的“海伦公式”、球面几何等等。第六卷还介绍了圆锥曲线，并有定义说：“截圆角体（圆锥）法有五：从其轴平分直截之，所截两平面为三角形，一也。横截之，与底平行，截面为平圆形，二也。斜截之，与边平行，截面为圭窦形（抛物线），三也。直截之，与



3—3　《测量全义》中之截圆锥图

① 据裴化行在《崇祯历书及西洋新法历书》（《华裔学志》第三卷）上说《几何要法》可能录自Euclidis Elementorum libri XV JO. Magniensis, Cologne, 1592一书。

轴平行，截面为陶丘形（双曲线），四也。无平行任斜截之，截面为椭圆形，五也。”（图3—3）

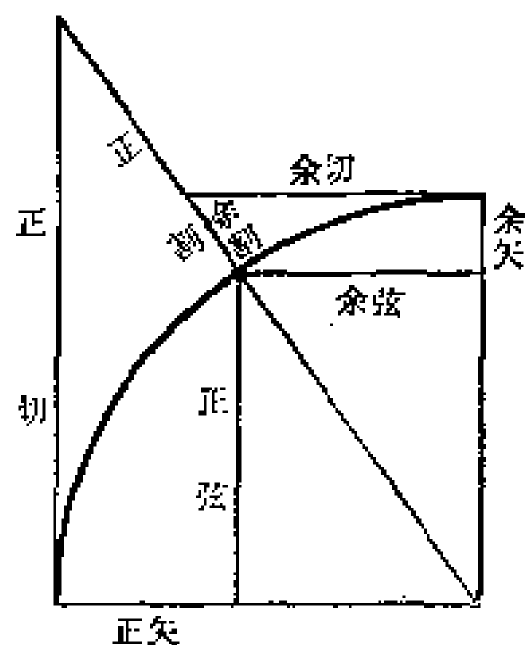
5．三角与对数的传入。三角是西方十六、七世纪发展较快的数学分支。因为它在天文历法方面有广泛的应用，所以在《崇祯历书》中有邓玉函撰的《大测》（二卷）和《割圆八线[①]表》（六卷），罗雅谷撰的《测量全义》（十卷）等书，介绍平面三角、球面三角和三角表。

其中《大测》一书，可能是依据德国毕笛斯克斯（B.Pitiscus，公元1561—1613年）的《三角法》和荷兰斯台汶（S. Stevin，公元1548—1620年）的《数学纪录》二书编译而成[②]。书中主要讲造表法，所用公式为“三要法”和“二简法”，即相当于下面的五个公式：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$（以上“三要法”）



3—4　八线图

① “八线”是与一个角有关的八条线段，叫做“正弦”、“余弦”、“正切”、“余切”、“正割”、“余割”、“正矢”、“余矢”，如图3—4所示。

② 白尚恕：《介绍我国第一部三角学——“大测”》，载《数学通报》，1962年第2期，第48—封底。

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=\sin A$$

（以上“二简法”）

许多名词，如弦、正弦、余弦、余切、余割，……均沿用至今。

关于平面三角的正弦定理、余弦定理和正切定理，在《大测》中都已提到，并有解直角三角形的方法。正弦定理、余弦定理和正切定理也同时出现在《测量全义》卷一中，同时还有相当于下列的三角公式：

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdots\cdots$$

其中$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

至于球面三角则《测量全义》卷七讨论较详。在一定条件下，已知球面直角三角形的三边和三个角中任意三个就可求出其余，于是书中给出了解球面直角三角形的公式三十条。此外，还有球面三角形的正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

在上述公式中，A、B、C代表平面角或球面角，a、b、c分别为它们所对弧的度数或平面三角形的边。下同。此外，还有其它一些公式，不再赘述。

《测量全义》卷三载有每隔15′的正弦、正切和正割表，求到小数后第四位。在《割圆八线表》中有了精细的三角表，包括六种函数，而且间隔为1′，求到小数后第五位。

对数是英国数学家纳白尔（J.Napier，公元1550—1617年）所发明。1624年，英国布里格斯（H.Briggs，公元1556—1630年）首先研究了以十为底的对数。几十年后，对数传到了我国。

清初，波兰传教士穆尼阁（J.Nicolas Smogolenski，1611—1656）于1646年来到我国，并在1653年与我国学者薛凤祚（公元？—1680年）等编译天文学、数学等书籍。穆尼阁死后由薛凤祚把这些书汇编为丛书《天学会通》三集四十种，于1664年出版。这部书第一次在我国介绍了对数和对数表，被收编在该丛书的《比例对数表》和《比例四线新表》两书内。

在《比例对数表》的序言中特别提到对数的优点："今有对数表，则省乘除，而况开方、立方、三、四、五方等法，皆比原法工力十省六七，且无舛错之患。"这是一本从1到20000的六位常用对数表。

《比例四线新表》是正弦、余弦、正切和余切的六位对数表。

《天学会通》中还有一部《三角法》，较系统地介绍了欧洲的三角法，其中平面三角大都配以对数计算，如

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{[\lg(s-b)+\lg(s-c)]-[\lg s+\lg(s-a)]\}$$

对球面三角方面，也多以对数入算，但有一批新公式，不见于《大测》、《测量全义》等书。主要有以下四条：

$$①\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{ct}\frac{C}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{ct}\frac{C}{2}\end{cases}$$

$$②\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{ct}\frac{c}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{ct}\frac{c}{2}\end{cases}$$

$$③\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

还有$\frac{B}{2}$、$\frac{C}{2}$之公式，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$

$$④\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B\sin C}}$$

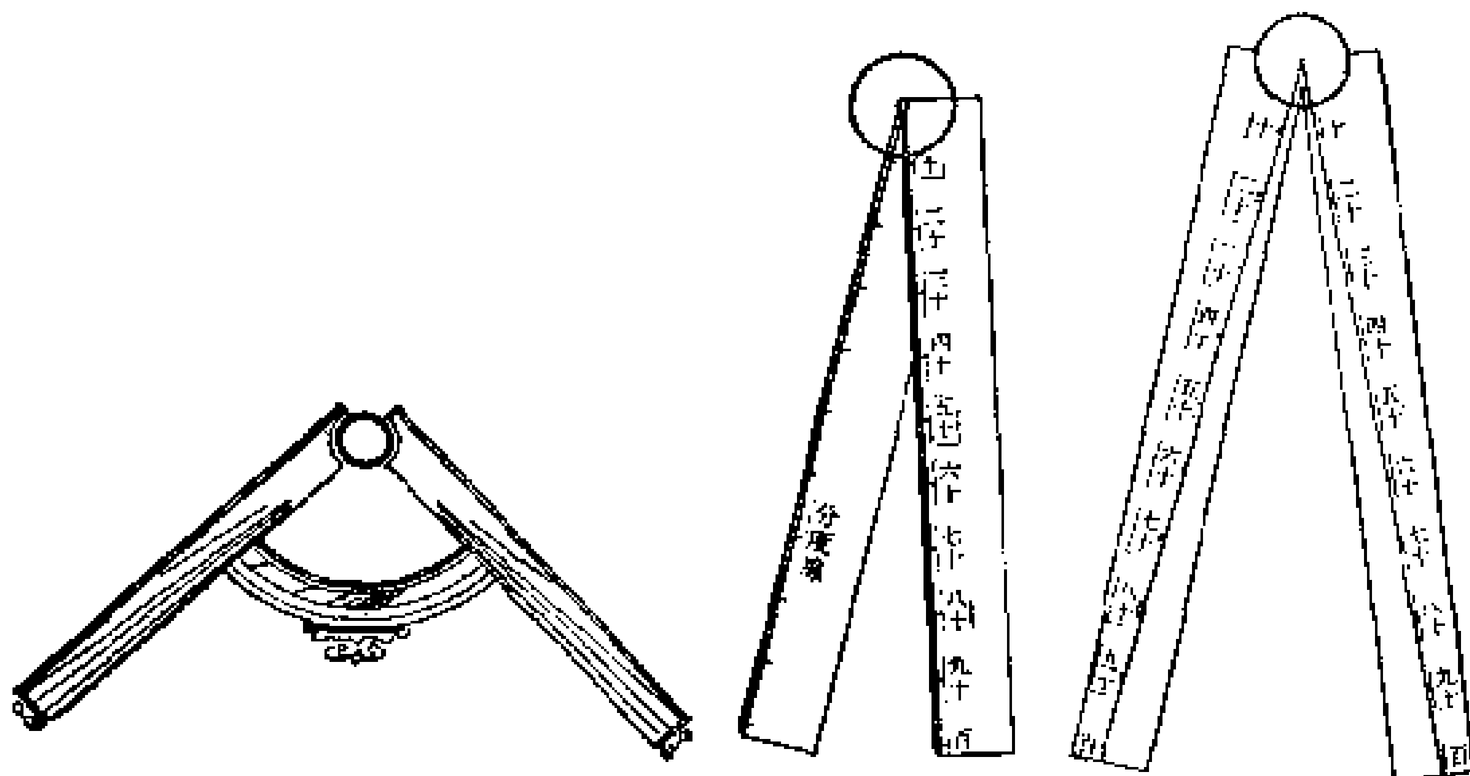
还有$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$之公式，其中 $E=\frac{A+B+C-180^\circ}{2}$

上面四个公式中的前两个是很有名的，式①叫“德兰伯比例式”（Delambre's analogies）；式②叫“纳白尔比例式”（Napier's analogies）。

十七世纪欧洲的数学有三项重大的成就，即微积分、解析几何和对数。其中只有对数传到我国。

6．比例规与纳白尔算筹的传入。比例规是伽利略（Galileo Galilei，公元1564—1642年）于1597年发明的，系能开合的两个带刻度的直尺，通过比例相似原理进行计算。在

十七世纪初的欧洲很流行，并很快传入我国。1627年由邓玉函与我国王征（公元1572—1644年）合译的《远西奇器图说》中所说的"分方分圆尺"，就是指的比例规。1630年罗雅谷在我国撰《比例规解》一书，收入《崇祯历书》中。罗雅谷在自序



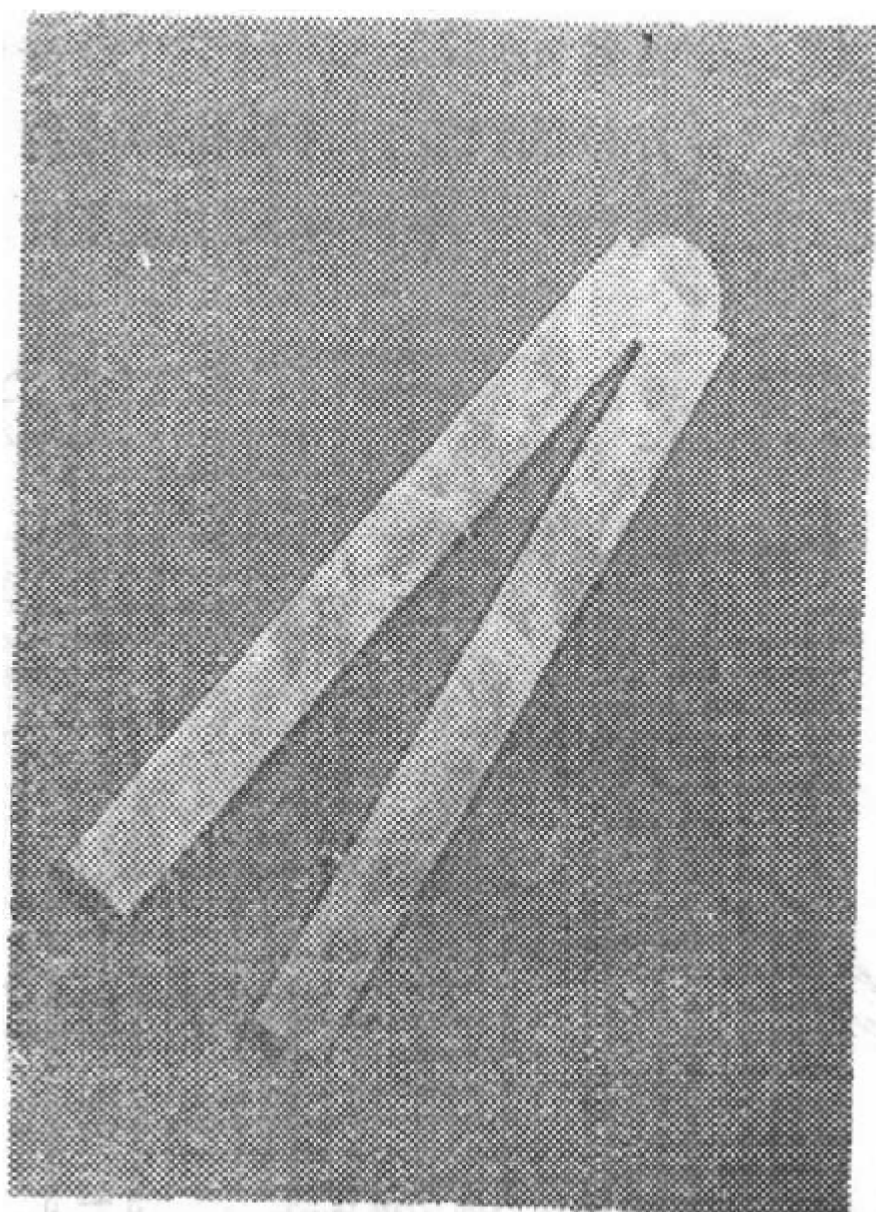
3—5　伽利略著作中的比例规图　　3—6　《比例规解》中的比例规图

里说：比例规"因度用数，开阖其尺，以规楷度，得算最捷。或加减，或乘除，或三率，或开方之面与体，此尺悉能括之。又函表度、倒景、直景、日晷、勾股弦算、五金轻重诸法及百种技艺，无不赖之，功倍用捷，为造玛得玛弟嘉最近之津梁也。"其中"玛得玛弟嘉"即拉丁语数学"Mathematica"之译音。由此可见，比例规用途之广泛。《比例规解》的底本，似乎是参考了伽利略著作而写成的①。以后在我国数学家的著作中也屡有论述。目前故宫博物院藏有各种质料和不同类型的比

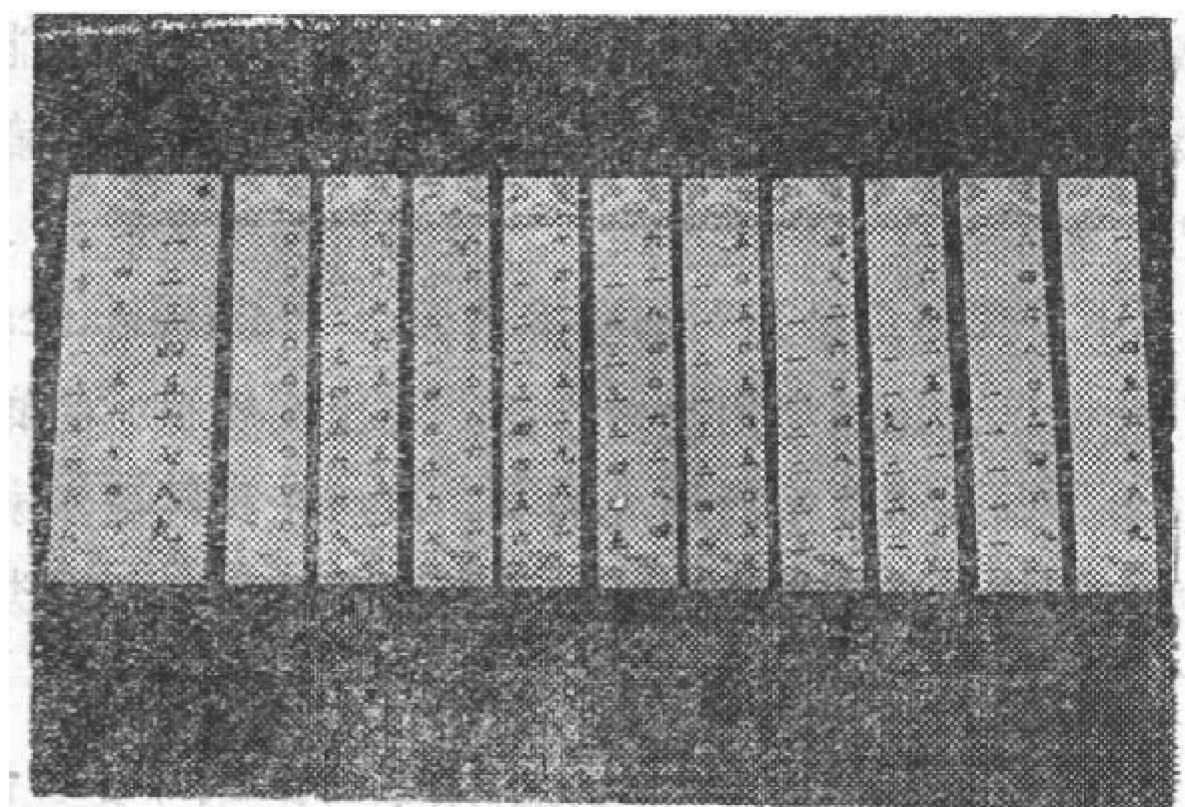
① 严敦杰：《伽利略的工作早期在我国的传布》，载《科学史集刊》第7期（1964），第8—27页。

例规数十具。

纳白尔算筹与我国传统的算筹完全不同，是对数发明人纳白尔于1617年发明的。1645年，汤若望在重新编成的《西洋新法历书》中增加了《筹算》和《筹算指》各一卷，第一次介绍了纳白尔算筹。这种算筹是根据中世纪时流行的"写算"制造的，即在一些长条形的板片上刻或写数码，对起来



3—7　北京故宫博物院所藏铜比例规



3—8　北京故宫博物院所藏纳白尔算筹

进行乘、除、乘方、开方运算。故宫博物院藏有多套。

比例规和纳白尔算筹传入我国后，学术界比较感兴趣，研究和使用较多。但因为它们不如我国算盘实用，所以在民间还是用珠算。

梅文鼎与杨作枚

明末传进我国的初等数学，引起学术界的很大兴趣。有一些知识分子不愿到清朝政府做官，却致力于研究从西方传进的天文历法和数学。由于传进来的数学，大都只有原理和法则（当然《几何原本》除外），而缺少进一步的论证，清初的一些数学家则在这方面进行研究，并且取得一定成果。其中的代表人物是梅文鼎。他的著作很多，涉及的范围很广。这里集中介绍他的工作和同他有密切关系的杨作枚。



梅文鼎

1．梅文鼎及其数学著作。梅文鼎（公元1633—1721年），字定九，号勿菴，安徽宣城人，出身于知识分子家庭。当时正是明末清初、改朝换代的时候，他的父亲不愿在清政府做官，过着"隐居"生活。梅文鼎也随父亲在江南的山村里生活和学习。他除了学习"四书五经"之外，还学习数学和天文学等自然科学。后来，他把主要精力用于数学、天文历法等方面的研究，把从西方传进的数学、天文学与我国传统的数学、天文学结合起来，融汇

贯通，并有自己的创造。

梅文鼎善于吸收前人和外国的科学研究成果，他认为应当采取“技取其长，而理唯其是”的态度，只要技术比我们先进，理论是正确的，就不应分什么中国的外国的。他指出：“法有可采何论东西，理所当明何分新旧，在善学者知其所以异，又知其所以同。去中西之见，以平心观理，则弧三角之详明，郭（守敬）图之简括，皆足以资探讨而启深思。务集众长以观其会通，毋拘名相而取其精粹。”①

梅文鼎一生研究数学的范围包括当时众多数学分支，著作宏富。他去世后的第三年（1723年），魏荔彤的兼济堂把他的大部分著作搜集起来编成《梅氏历算全书》，刊刻出版。1761年，梅文鼎的孙子梅瑴②成又对这些书进行选择，共挑出二十三种六十一卷，重编为《梅氏丛书辑要》，使人“展卷了然，即初学无难阅读”。下面将梅文鼎的主要数学著作分类列下：

算术方面：《笔算》五卷、《筹算》二卷、《度算释例》二卷、《西镜录订注》一卷、《比例数解》四卷和《筹算要指》。

代数方面：《少广拾遗》一卷、《方程论》六卷。

几何方面：《勾股举隅》一卷、《几何通解》一卷、《方圆幂积》一卷、《几何补编》四卷、《几何摘要》二卷、《勾股阐微》四卷。

三角方面：《平三角举要》五卷、《弧三角举要》五卷、《堑堵测量》二卷、《环中黍尺》五卷、《正弦简法补》。

这里所开列的著作，并没有全部收入《梅氏历算全书》和

① 梅文鼎：《堑堵测量》卷二。
② 瑴音决 jué。

《梅氏丛书辑要》中。仅从这一书目就可以看出梅文鼎的研究范围是如何广泛。梅文鼎可以称得起是一位全面发展的数学家。他的科学成就和研究方法在我国影响很大，形成了“宣城学派”。

以下分三部分简要介绍梅文鼎在数学方面的成就。

2．**我国第一部自著笔算著作——《笔算》**。我国古代最初的数学计算不是笔算，而是筹算。元代以后，筹算又逐渐由珠算所代替。笔算曾于唐代传入我国，但未被我国数学界所接受。明代吴敬和程大位等所介绍的“写算”，实际上也是笔算，但也未得到普及。梅文鼎写成我国第一部自著笔算数学《笔算》一书后，笔算才真正在我国生根、开花、结果。

《笔算》是梅文鼎中期著作之一，所讲内容都比较浅显。算术四则、分数、比例、小数和开平立方等，都是用笔算。

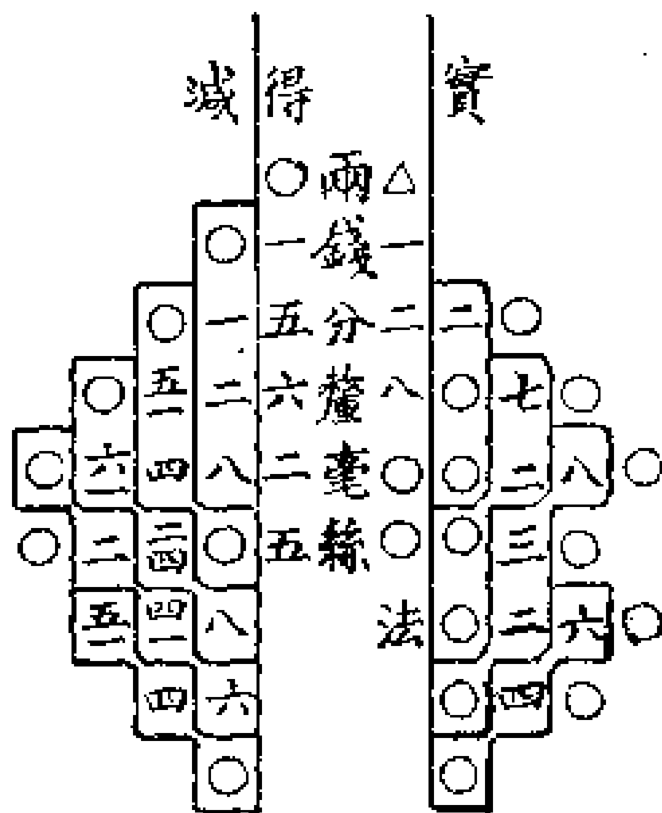
有一部分取材于《同文算指》，也可能有《欧罗巴西镜录》中的某些内容。书中也有梅文鼎自己的独立见解。

梅文鼎改变了原来《同文算指》中的笔算除法，假如以 8 除76048，《同文算指》把被除数横列，并用我国大写数字由左至右书写，表示数目由大至小，然后议商，“先看八除七六得几，转以乘法除之，八九七十二是也，注九于格右，尚余四，变六作四〔写四于六上〕，削去首七，亦削去次行除数之八。”

	四					
柒	陆	〇	肆	捌	(九	五
	八	八				

求出商的第一位后，得余数4048。再以 8 除之得商 5 ，方法同前，除尽为止。算法较笨。梅文鼎的除法演算步骤比较简捷。例如“经商获利二千两，原本三千二百两，已经四年。问每年每两之息”题，梅文鼎用除法计算，先以“四

乘原本”（4×3200=12800），以此为除数，一次除之，得商一钱五分六厘二毫半。演算步骤如图3—9。

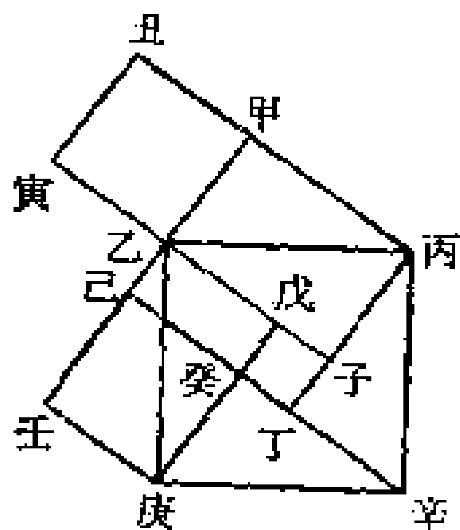


3—9 梅文鼎除法

梅文鼎提出乘法可以用除法验算，除法也可以用乘法验算。重要的是他发现“法实在乘法可以互用”的规律，就是乘数（法）、被乘数（实）可以互相交换，即$ab=ba$这样的乘法交换律。

在计算中，梅文鼎还有命“根”法。“根”起定位的作用，比如以亩为单位，就在亩位旁写一个“根”字，以两为单位在两位旁记一“根”字，等等。这种记法虽与小数点的意义不同，但起小数点的作用。说梅文鼎是我国小数点的先驱也未尝不可。

《笔算》也有不足之处，它的乘法比较复杂，特别是把西方较先进的阿拉伯数码字改为中国的数目字，而且改横行书写为直行，计算不方便，这是由于我国的书写习惯造成的。

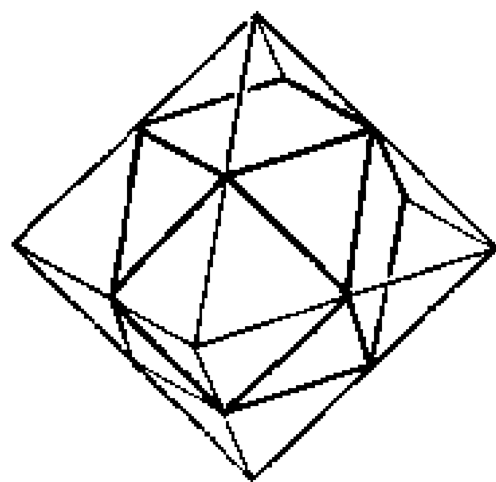


3—10 梅文鼎的勾股定理证明

3．在几何方面的成就。梅文鼎在平面几何方面设计了一种勾股定理的证明方案，如图3—10。△甲乙丙是直角三角形，因为三角形丙丁辛与三角形乙

壬庚全等，三角形辛癸庚与三角形甲乙丙全等，于是有：$\overline{甲乙}^2+\overline{甲丙}^2=\overline{乙丙}^2$。证法比较简单。

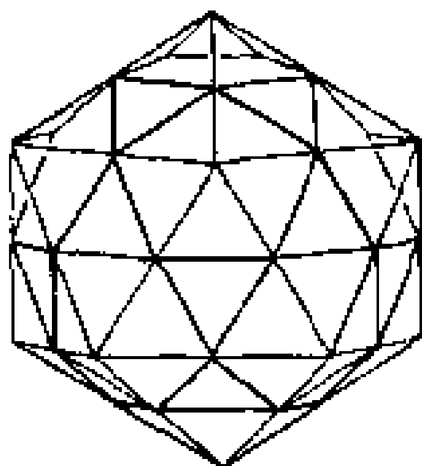
梅文鼎在几何学方面的主要贡献是立体几何研究。过春节或元宵节时，他在市镇上看到人们做的各种吊灯，大都是规则的立体形：圆球的、正六面体的、正八面体的等等。每个正多面体都是由相等的正多边形构成，所有的二面角也都相等。这种非常规则的立体比较好做，只要剪一些相同的三角形或正方形等，就可以做成。可是还有一些立体，虽很规则，但不是由一种相同的平面形构成，例如他在1692年看见的一种"方灯"是由一组相同的等边三角形和一组相同的正方形做成的。这在几何上应怎样作图呢？梅文鼎翻遍当时能找到的几何书，也没能找到现成的作图法。这样，他只好通过自己的研究来解决。其实作法比较简单，和前面提到的古代做半正多面体水晶珠的作法一样，把一个正六面体（即立方体）的每一个棱线都二等分，然后过这些分点用平面切去八个顶角，就成了一个新立体(图3—11)。这个立体有六个相等的正方形的面和八个正三角形的面。



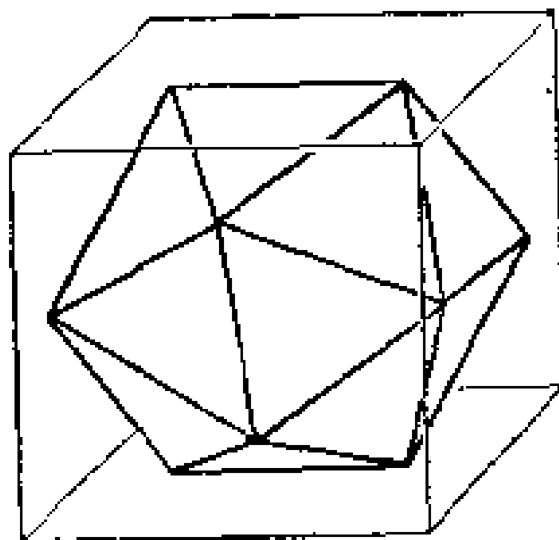
3—11 方灯的作法

梅文鼎还作过另外一种半正多面体，叫"圆灯"，是由正十二面体或正二十面体"以原边之半作斜线相联，依此斜线割之而去其角"。作法和前一种相同，用正二十面体作成的半正多面体象图3—12那样。

梅文鼎对于正多面体互容问题也作了深入研究。例如在一



3—12　圆　灯



3—13　正六面体内容正二十面体

个正六面体内作一正二十面体，它有六个棱在正六面体的每一个面上，因而所有的十二个顶点也都在正六面体的面上。在图3—13中，正二十面体的棱，前、后两个是纵的，上、下两个是横的，左、右也是横的，但与上、下的垂直，它们都在每个面的正中央。他还计算出这种正二十面体的棱长是原正六面体棱长的$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$倍。他就是用这种办法很快完成了这个作图问题。

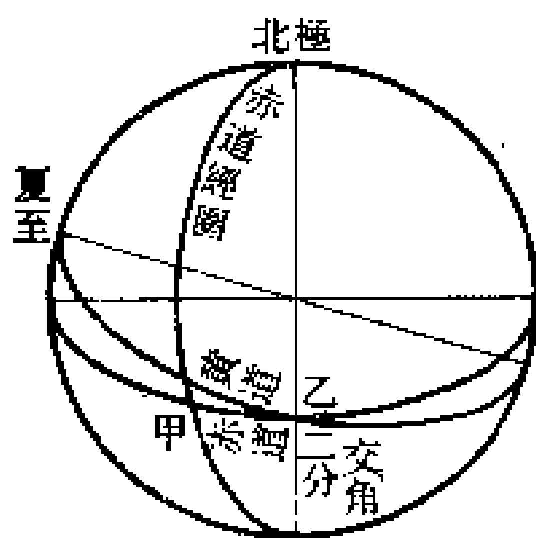
其它类似的问题还有不少，这里不一一介绍。

4．对三角学的研究。梅文鼎结合天文历法深入研究了三角学。他的《平三角举要》和《弧三角举要》是我国最早平面三角和球面三角著作。书中系统而全面地介绍了三角知识。《堑堵测量》和《环中黍尺》两书对球面三角公式作了补证，尤其后一本书内容很精采。

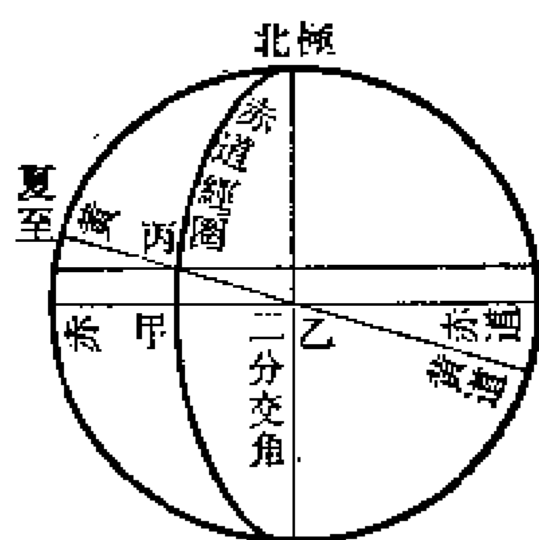
原来从西方传到我国的三角学，大都只有名目或公式，缺乏解释和理论证明。梅文鼎对这种情况是不满意的，因此他积数十年之探索，给以补充证明。尤其在球面三角方面，论证较多。

梅文鼎创造性地利用投影原理，把球面三角问题转化为平

面问题加以解决。在《环中黍尺》卷一的“总论”中说明了他的思路：球面三角形“作图之法有二，一为借象；一为正形。以平写浑，不得已而为侧睨远望之形，以曲状其变，然多借象，而非正形，兹一准平仪法度。真二极于上下，而从旁平视之，〔如置身大圆之表以观大圆〕，则浑球上凸面之经纬弧角，一一可写于平面，而悉为正形。”即用平行投影法把球面上的大圆投影到一个平面上。如果投影线不垂直于投影平面，所得投影为梅文鼎所说的“借象”（即斜投影）；垂直于投影平面的投影（即正投影），梅文鼎称为“正形”。“借象”即“斜视之图”（图3—14），各大圆的投影多成曲线，用起来很不方便。正形中许多线都呈直线，容易找到球面三角形中的各种关系，因此他主要用正形（图3—15）。



3—14　球的“斜视之图”



3—15　球的“平仪正形”图

梅文鼎利用正形法解球面三角形和证明球面三角公式，获得很好的成果。有名的余弦定理、积化和差公式和其它一些公式都是这样证明的。现以余弦定理为例作一说明。

余弦定理的现代形式为

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \quad (1)$$

《测量全义》中的形式相当于下面的公式：

$$1:\sin b=\sin c\,\mathrm{vers}A:[\mathrm{vers}a-\mathrm{vers}(c-b)] \qquad (2)$$

或

$$\mathrm{vers}a=\sin b\sin c\,\mathrm{vers}A+\mathrm{vers}(c-b)$$

如果单位球①上的一个已知球面三角形为ABC，O是球心，A、O连线与球面交于另一点E，把球面正投影在$\overset{\frown}{AC}$所在的圆面上，ABC的正形为$AB'C$②（如图3—16）。设球面角A为锐角，$\overset{\frown}{AC}$小于象限弧，$\overset{\frown}{AB}$大于象限弧，且设$a=\overset{\frown}{BC}$，$b=\overset{\frown}{AC}$，$c=AB$，而A、b、c为已知，求a。梅文鼎证明了上面两个公式，现在来证明（2）。

3—16　梅文鼎球面三角形投影图

过O作半径$OF\perp AE$，与$\overset{\frown}{CB}$、$\overset{\frown}{AB'}$交于点G、H。C、O连线，过B'作$B'I\perp CO$，再过B'作$DP\parallel OF$，过P作$PJ\perp CO$，过B'作$B'L\perp PJ$，再过C作$CK\perp AE$。根据规定$OF=OB=1$。显然，FH是球面三角形角A的正矢，即$FH=\mathrm{vers}A$。PD是以D为圆心的小圆的半径，是球面三角形ABC的$\overset{\frown}{AB}$的正弦，即$PD=\sin C$。又，PB'为角A在小圆上的正矢，所以$PB'=\sin c\,\mathrm{vers}A$。$CI$为$\overset{\frown}{CB}$的正矢，即$CI=\mathrm{vers}a$；$CJ$为$\overset{\frown}{CP}$的正矢，即$CJ=\mathrm{vers}(c-b)$。由此$JI=CI-CJ=\mathrm{vers}a-\mathrm{vers}(c-b)$。而$B'L=JI$，故$B'L=\mathrm{vers}a-\mathrm{vers}(c-b)$。$CK$为$AC$的正弦，即$CK=\sin b$。又，由作图知$\triangle OCK\backsim\triangle PB'L$，于是有

① 半径等于一个单位的球。

② 点B'是B在$\overset{\frown}{AC}$所在平面上的投影，B'与B重合。

$$OC:CK=PB':B'L$$

将此四个线段的值代入，就得（2）式。

梅文鼎用这种方法也证明了（1）式。

梅文鼎证明时他把空间问题转化为平面问题去处理，具有独创性。

5. 校订《梅氏历算全书》的杨作枚。和梅文鼎同时代的数学家还有杨作枚。

杨作枚，十七、八世纪之间人，字学山，锡山（今江苏无锡市）人。祖父杨定三，精通天文学、数学，著《方圆订注图说》一书。杨作枚继承祖业，钻研天文历法和数学，著有《锡山历算书》数种。梅文鼎曾为此书作序（1712年）。

《锡山历算书》包括《溯源星海》四册、《王寅旭历书图注》二册、《三角法会编》二册。此外还有"勾股"、"八线"、"测量"、"方程"等多种。在《无锡金匮县志》中记载杨作枚所作的书有《勾股论》二卷、《几何补编》一卷、《几何增解》一卷、《方程图解》一卷和《历法大成》十卷。这些书，大都失传。

梅文鼎对杨作枚的评价很高。他说："学山独以颖妙心思，探无穷底蕴，于朔望、次轮之外，再加小轮，定其半径，著其算法，与表（月离表）密合。"并称赞杨作枚的数学著作"皆有精思奥理，自成一家"①，因此，他把杨作枚当成学术上的挚友。康熙四十九年（1709年）冬天，当梅文鼎到吴门时，杨作枚前去拜访。两人一见如故，讨论起天文、数学问题

① 梅文鼎，《锡山友人杨学山历算书序》（1712），载《梅氏历算全书》前。

来。杨作枚把《锡山历算书》给梅文鼎看；梅文鼎也把自己的《几何补编》与作枚“相质”。

公元1721年，梅文鼎去世，两年后魏荔彤的兼济堂要出《梅氏历算全书》。梅文鼎家属把已出和未出的全部书稿搜集在一起，“约计三十余种，内已成书而待刊者十之四；稿略具而未成书者十之六。”①这十分之六的未成稿必须补充整理成定稿才能刊刻出版，需由学术水平较高而又熟悉梅文鼎的人来承担此项定稿工作。

魏荔彤经过了解，认为只有杨作枚最合适，于是把他请到兼济堂“为之订补，疏剔。义之未明者阐之；图之未备者增之；文之缺略者务使有论有要，首尾贯通，既以勿菴所著为宗，而复有发明修饰之功”。魏荔彤进一步肯定了杨作枚的工作，“庶读者不烦言而解明期于不负勿菴相托之心，而学山好古勤求之志，亦可嘉尚矣。”②这种工作相当于审稿兼编辑，工作量很大。杨作枚付出大量心血，作了订补、疏剔工作。

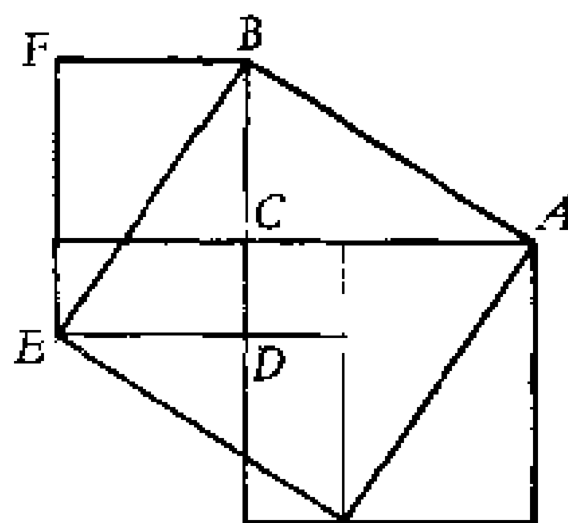
在“订补、疏剔”过程中，杨作枚对梅文鼎的书进行了不少有益的增补。据《梅氏历算全书》前的“凡例”中所指出的，则有“勿菴旧刻各种，内有可类附者亦增入一二，如《弧三角举要》旧刻五卷，今增为六是也。又勿菴言所未及，而理数必不可缺者，杨君亦为补缀，如《割圜八线之根》一卷是也。又如勾股测量诸术，历家所重，原稿另星散轶，今增补为四卷，余编亦多类此。”“勾股测量”即梅文鼎的《勾股阐微》四卷，其第一卷为杨作枚所增补，题为《勾股正义》。这些增补

① 《梅氏历算全书·凡例十则》。
② 同上。

工作都在《梅氏历算全书》中保存至今。

杨作枚对数学的研究方面很广泛，著述流传至今的主要是几何与三角方面的。

《勾股正义》中包括勾股定理的证明，勾、股、弦及其和、差的互求，勾股容方和容圆，以及勾股定理的应用。他提出一种新的等积变换图形证明了勾股定理（图3—17），并把勾、股、弦及其和、差互求问题进行分类，列出144题，条理清楚。



3—17　杨作枚的勾股定理证明图

《解八线割圆之根》是一部很有价值的数学著作，补充了前人关于正多边形的理论。比如《大测》中有关"十边、五边形之理，皆缺焉"，而薛凤祚也"仅依式推衍"，未讲道理。杨作枚则较系统地论述了正多边形的证明和作图方法。书中还论述了三角问题。

康熙时代其他几位数学家

清康熙年间（公元1662—1722年），与梅文鼎同时代的还有不少从事数学研究或在其著作中包括有关数学内容的人。这里择其要者作一介绍。

1．对初等数学的研究和整理。在清初康熙年间有不少人对明代的《算法统宗》和《几何原本》前六卷的译本等当时流行的书籍进行研究。有的把各书的内容分门别类编纂在一起，有的把原书加以改编。其中如李长茂、王锡阐、方中通、李子

金、杜知耕、毛宗旦、陈讶①等都有著作传世。

李长茂，字明南，章丘（今山东章丘县）人，著《算法说详》九卷，有顺治十六年（公元1659年）自序。北京故宫博物院图书馆藏有康熙元年（公元1662年）刊本六册。内容主要是讲算术和初等几何问题。

王锡阐（公元1628—1682年），字寅旭，号晓庵，今江苏吴江人。他是一位卓越的天文学家，在天文学方面有所创见。他在研究中应用了当时刚传进的球面三角知识，著有《晓庵新法》等书。关于数学，王锡阐著有《圜解》一卷、《筹算》一卷等。前者是中国人最早自著的平面三角学之一，主要讲述“八线”的性质与两角和、差的正弦、余弦公式②，内容比较简单；后者只见书名③，可能已失传。从书名看无疑是讨论西方纳白尔筹算的。

方中通（公元1633—1698年），字位伯，今安徽桐城人。明末著名的哲学家、科学家方以智（公元1611—1671年）的次子。他与梅文鼎关系较为密切，梅氏在“复柬方位伯”等诗中说：“象数岂绝学，因人成古今。创始良独难，踵事生其新。”梅氏著《方程论》，“质之方子（中通）”。④方中通于1661年著《数度衍凡例》，以后编成《数度衍》二十四卷，较系统地讲述了中西初等数学。书中还详细介绍了纳白尔算筹，有用作乘除的十个单个筹，还有联在一起的“平方”筹和“立方”筹（图3—18）。这些筹都是竖排，按对角线方向相加的。其

① 讶音呀yà。
② 焦循：《里堂道听录》卷三十八“圜解”。
③ 朱记荣：《国朝未刊遗书志略》。
④ 梅文鼎：《绩学堂诗文钞》卷一。

方	平
一	一
四	二
九	三
一 六	四
二 五	五
三 六	六
四 九	七
六 四	八
八 一	九

3—18　《数度衍》“平方”筹图

中卷十一内“位加隔位合数法”，有对数思想。①

李子金，号隐山，今河南柘城人，著有《隐山鄙事》十二种。其中有三种是数学，即《算学通义》五卷（公元1676年）、《几何易简集》三卷（公元1679年）和《天弧象限表》（公元1683年）。在《算学通义》中有关于已知弦、矢求弧长的近似公式。《天弧象限表》共97页，其中有正弦、余弦函数表，每度分为百分，每十分有值，算到小数第五位。《几何易简集》是《几何原本》和《几何要法》二书的“删注”本。

杜知耕，字端甫，号伯瞿，是李子金的同乡。著有《数学钥》六卷（公元1681年）和《几何论约》七卷（公元1700年）两书。前者是《九章算术》的体例，再取线、面、体三部之法“隶之，载其图解，并摘其要语以为之注。”②后者题为“欧几里得撰，杜知耕删补”，是删削《几何原本》前六卷而成，故名《几何论约》。

毛宗旦（公元1668—？年），字扅③再，钱塘（今杭州市）人。他精于数学，著有《九章蠡④测》十卷，附《句（勾）股蠡测》一卷⑤，是仿《九章算术》体例写的。书前有“康熙丙

① 严敦杰：《方中通〈数度衍〉评述》，《安徽史学》创刊号（1960），第52—57页。

② 《四库全书总目提要》卷一百零七。

③ 扅音移yí。

④ 蠡音梨lí。

⑤ 上海图书馆藏有此书旧抄本（或稿本）九册，原书共十二册，现缺第二、四、五三册。

申（公元1716年）钱塘毛宗旦发凡”三页，其中记载明、清算书多种，如《九章比类（大全）》、《算法统宗》、《同文算指》、《几何原本》、《数学钥》、“梅氏方程”以及《周髀算经》等等。

陈讦（公元1650—1722或1732年），字言扬，浙江海宁人。他著有《句股述》二卷（公元1683年）和《句股引蒙》五卷。这些书都是讲初等数学的。前者包括勾、股、弦及其和、较（差）之互求及勾股定理的应用；后者讲笔算和一些平面三角。他的儿子陈世信也写有《弧矢割圆》、《少广补遗发明》等数学书。

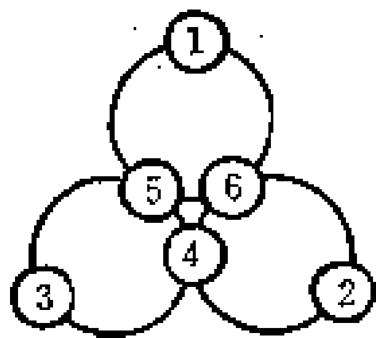
以上所述各家的数学著作，除王锡阐所著的外，大体是两种体系，一是中国传统的《九章算术》①体系，尽管有些变化，但未出大格；另一是《几何原本》体系，不过他们都放弃了原书比较严格的公理方法，只保留了一些几何知识。有把后一体系变成前一体系的趋势，有的已把后者纳入前者。可见在学术上打破传统观念是非常困难的。过了半个世纪，有人在讲述了古代的《算经十书》之后说：“胥不能稍出《九章》之范围焉，呜呼！九数之作非圣人孰能为之哉？”②

2．张潮的“算法补图”。张潮（公元1650—？年），字来山，今安徽新安人。他本来不是搞数学的，但喜欢研究数字的组合规律。他在《心斋杂组》卷下有一篇“算法补图”论文。“算法补图”共十七页，介绍了二十四个纵横图，大都非常别致。文中有一段文字，说明这些图是他在《算法统宗》的

① 当时《九章算术》只有极少的孤本流传，这些人未必亲自见过。
② 孔继涵：《算经十书序》。

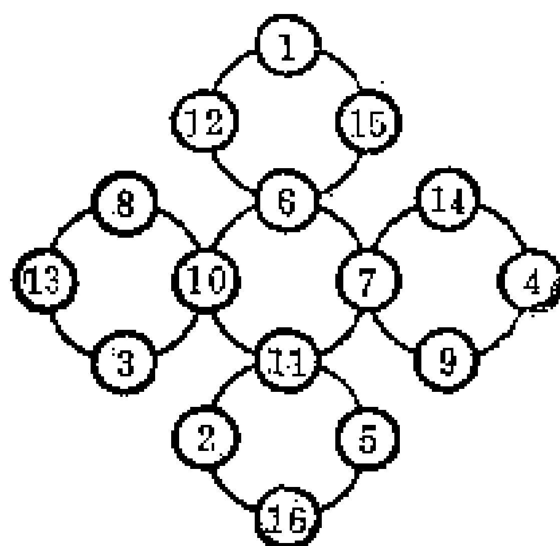
影响下独创的。文里写道："《算法统宗》所载十有四图。纵横斜正，无不妙合自然，……内惟百子图，于隅径不能合，因重加改定，复以意增布杂图，亦皆有自然之妙。乃知人心与理数相为表里，引而申之，当犹有不尽于此者，姑即其已然者列于后。"

二十四个纵横图，从名称上看有十一种，即"参三图"（图3—19）、"搩四图"（图3—20）、"伍五图"、"六



参三图
六子作九子用，三角各十二数，每面各九数。

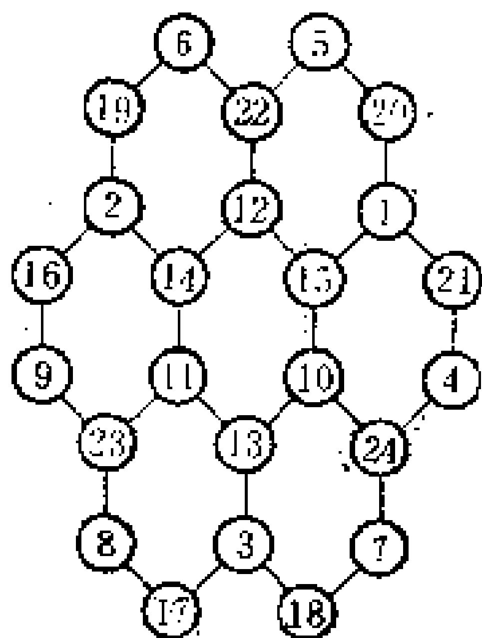
3—19



搩四图
十六子作二十子用，角径、平径、四方、四尖中心俱三十四数。

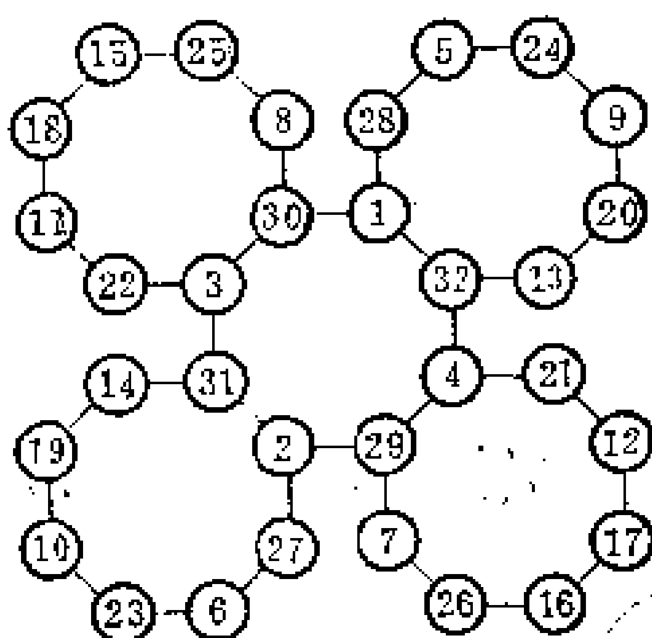
3—20

图"、"六合图"、"更定聚六图"、"龟文聚六图"（图3—21）、"七襄图"、"八阵图"（图3—22）、



龟文聚六图
二十四子作四十子用，各七十五数。

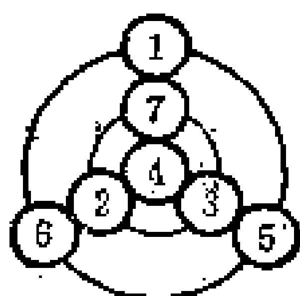
3—21



八阵图
三十二子作四十子用，各一百三十二数。

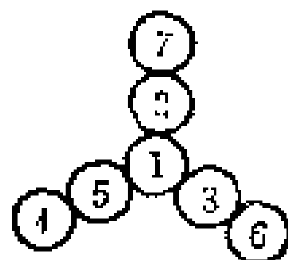
3—22

"九宫图"和"更定百子图"。实际上可分为四大类，可称它们为"联合图"（包括前两种"参三图"（图3—23、图3—24）、"撰四图"，四种"伍五图"、"龟文聚六图"、"七



参三图
七子作十五子用，圆、径俱十二数。

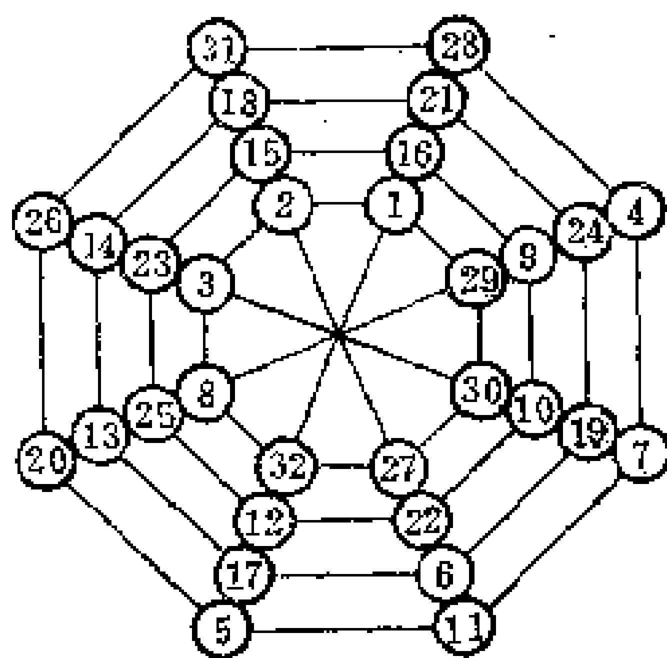
3—23



参三图
七子作九子用，三径各十数。

3—24

襄图"，一种"八阵图"（图3—25）和两种"九宫图"）、"周径图"（包括三种"参三图"、"六合图"，两种"八阵图"）、"方形图"（包括一种"伍五图"、"六图"，一种"九宫图"、"更定百子图"），"更定聚六图"可为独立的一类。



八阵图
三十二子作六十四子用，圆、径各一百三十二数。

3—25

"联合图"的特点是几个圆组合在一起，如由1—6的六个数组成三个相外切的圆圈。每个切点上一个数，每个圆圈上三个数，其和均相等。其余的也与此类似。

圆径图的特点是由某前几个自然数构成几个同心圆或同心正多边形。每个圈上的数之和均相等，半径上的数之和也相等，大多数图中周、径之数相等。其余的例子不再列举。这些

图的结构虽然比较简单，但都是他创造的。

3．陈世仁的"垛积术"。陈世仁（公元1676—1722年），字元之，今浙江海宁人。他1715年考中进士。著有《少广补遗》一卷，"专明垛积之法"。把垛积看做"少广"，可能是从陈世仁开始的。阮元对此种看法持反对态度，他说："垛积之术，不见于《九章》，乃'商功'之流，而以为'少广'者，近代算家之陋也。"①然而陈世仁的研究工作却受到称赞，阮元也说："世仁详人之所不详，其用心有足尚已。"②钱宝琮也说："其时宋元算书湮没不传，当代畴人无研治垛积术者。世仁出自机杼，独于此学多所发明。所撰书虽止一卷，然以少许胜人多许，亦足以自豪矣。"③

《少广补遗》全书共给出37个垛积公式以及若干变形公式，但基本上分为十二类，即平尖、立尖、倍尖、方尖、再乘尖、抽奇平尖、抽偶平尖、抽偶数立尖、抽奇数立尖、抽奇偶数方尖、抽偶再乘尖、抽奇再乘尖。由于当时杨辉、朱世杰等人的数学著作尚未发掘出来，有些公式前人虽然已经求得，但陈世仁是不知道的，因此所用的名称都与前人相异。现把他的新公式列下。

倍尖：$1+2+4+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

再乘尖：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

抽奇平尖：$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

抽偶平尖：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

抽奇数立尖：$2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots$

①② 阮元：《畴人传》卷四十一。

③ 钱宝琮：《浙江畴人著述记》，载《文澜学报》第3卷第1期（1937），第1—12页。

$$+2[1+2+3+\cdots+(m-1)]=\frac{m^3-m}{3}$$

抽偶数立尖：$(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+$

$$[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$$

$$=\frac{n}{3}\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$$

抽奇偶数方尖：$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$

抽偶再乘尖：$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

抽奇再乘尖：$2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$

此外，还有一批稍复杂一些的垛积公式，现举几例如下：

$$1+6+15+28+\cdots+[1+2+3+\cdots+(2n-1)]$$

$$=1\times1+2\times3+3\times5+4\times7+\cdots+n(2n-1)$$

$$=\frac{n}{6}(4n-1)(n+1)$$

$$3+10+21+36+\cdots+(1+2+3+\cdots+2n)$$

$$=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+\cdots+n(2n+1)$$

$$=\frac{n}{6}(4n+5)(n+1)$$

$$r(r+1)+(r+1)(r+2)+\cdots+(r+n-1)(r+n)$$

$$=nr(r+n)+\frac{n}{6}(2n-2)(n+1)$$①

等等。

这些求和公式，在我国级数研究方面占有一定地位。其中“再乘尖”、“抽奇偶数方尖”、“抽偶再乘尖”和“抽奇再乘尖”等四个公式都是“幂和公式”的特例。“幂和公式”到十九世纪，在我国得到重大发展。

① 陈世仁的《少广补遗》一书没有刊本，仅有《四库全书》本。还有几个抄本分别藏于李俨处、南京图书馆和广东中山图书馆。

第二节 清康熙皇帝主持下的数学研究

康熙皇帝重视科学

爱新觉罗·玄烨①，八周岁登极，做了清朝的第二代皇帝。他在位六十一年，年号康熙。在我国历史上，有些封建帝王也重视科学技术，支持科学研究工作，但是象康熙皇帝这样不仅热心支持科学研究工作，而且自己带头学习科学、掌握科学的帝王，是极其罕见的。

1. 清初的中西历法之争与康熙皇帝。1645年清政府把汤若望编的《时宪历》颁行全国，并任命他为"钦天监管监正事"（相当于国家天文历法研究机构——钦天监的代理负责人，监正是这个机构的最高职务）。1659年，比利时耶稣会士南怀仁（Ferdinand Verbiest,公元1623—1688年）来到我国，1664年在汤若望的推荐下来到北京。他们一起在钦天监工作。这时先后来我国的西方传教士，加上明末来的，大约已有二三十人之多。

但是西方历法在我国的推行曾经受到阻碍。1659年既不懂中国天文历法也不懂西方天文历法的杨光先（公元1597—1669年）著《辟邪论》，反对传教士主持历法工作。1664年，年轻的康熙按辅政大臣鳌拜的意见行事，把汤若望、南怀仁和另外

① 烨音业yè。

两人逮捕入狱。第二年三月，杨光先又上奏说西洋历法有十大谬误，康熙轻信这些毫无根据的说法，决定将汤若望、李祖白、杜如预等人处死。后来汤、杜得到赦免，其余有的被斩首，有的被流放。南怀仁因刚到中国不久，幸免。从此，杨光先在鳌拜的支持下在钦天监总揽一切事务。1668年，康熙皇帝开始有所醒悟，任命南怀仁治理历法。

这年十二月，南怀仁向康熙汇报了钦天监监副吴明烜① 推算历法的种种误差。由于有了前一次的教训，康熙没有立刻作出决断，而是在第二年二月命大臣二十员赴天文台测验，结果证明南怀仁说的各项完全正确，而吴明烜说的逐条都有错误②，于是把杨光先赶出了钦天监。③ 从此，南怀仁等得到康熙的信任，被任命为监正，称为监修④。南怀仁很有学问，从康熙八年到十二年（公元1669—1673年），制作了天体仪等六件大型天文仪器，撰写了《灵台仪象志》等书。

这场斗争使康熙悟出一个道理，就是西方的科学比中国某些传统的学术优越，这就促使康熙积极学习西方科学。

2. 康熙学习数学和科学技术。康熙非常爱学习，不仅认真学习汉文、历史和古代经典，而且热心于科学技术，至老不倦。他首先拜南怀仁为师，据记载："南怀仁神甫给康熙皇帝讲解了主要天文仪器、数学仪器的用法和几何学、静力学、天文学中最新奇最简要的内容，并就此特地编写了教材。"⑤

1685年，法皇路易十四世在位时，法国教会对中国采取积

---

① 烜音选xuǎn。

②③ 蒋良骐：《东华录·康熙九》。

④ 《清朝文献通考》卷八十三。

⑤ 白晋著、赵晨译，《康熙皇帝》，1981，黑龙江人民出版社，第32页。

极传教方针，派遣塔沙尔（Guy Tachard）、洪若翰（Jean de Fonlaney）来我国传教，中途除塔沙尔一人留到暹罗（今泰国）外，其余五人于康熙二十六年（公元1687年）来到我国。以前已有葡萄牙的一些传教士，如徐日升（Thoma Pereira，公元1645—1708年）、闵明我（Philippe-Marie Grimardi，公元1657—1712年）以及比利时教士安多（Antoine Thomas，公元1644—1709年）等早在北京，受到康熙的重用。第二年，这批法国教士由徐日升等引见，康熙接见了他们，并把"善算"的白晋、张诚留在宫廷。

这时，康熙每天由张诚、徐日升、白晋、安多等轮流讲授西方数学、测量、天文、炮术等。他外出巡视时也带上懂科学的人，走到哪里学到哪里。在数学方面，张诚等先用满语给康熙讲解欧几里得《几何原本》。白晋说："皇上认真听讲，反复练习，亲手绘图，对不懂的地方立刻提出问题，就这样整整几个小时和我们在一起学习。然后把文稿留在身边，在内室里反复阅读。同时，皇上还经常练习运算和仪器的用法，复习欧几里得的主要定律，并努力记住其推理过程。这样学习了五、六个月，康熙皇帝精通了几何学原理，取得了很大进步，以致于一看到某个定律的几何图形，就能立即想到这个定律及其证明。有一天皇上说，他打算把这些定律从头至尾阅读十二遍以上。""我们用满语把这些原理写出来，并在草稿中补充了欧几里得和阿基米德著作中的必要而有价值的定律和图形。除上述课程外，康熙皇帝还掌握了比例规的全部操作法、主要数学仪器的数学用法和几种几何学和算术的应用法。"①

① 白晋著、赵晨译：《康熙皇帝》，1981，黑龙江人民出版社，第34页。

康熙的学习并不满足于掌握原理法则，而是学会应用。因此，他在“充分领会了几何原理以后，还希望能用满语起草一本包括全部理论的应用几何学问题集，并以讲解原理时所用的方法，讲应用几何学。同时，皇上旨谕安多神甫用汉语起草一本算术和几何计算问题集，它应该是西洋和中国书籍中内容最丰富的”。①

白晋又说：“皇上在研究数学的过程中，已感到最大的乐趣，因此，他每天都和我们在一起度过两三个小时。此外，在内室里，不论白天还是夜晚，皇上都把更多的时间用于研究数学。……”每当学习到几何学中最有价值的知识时，皇上总是怀着浓厚的兴趣，把这些知识应用于实际，并练习数学仪器的操作。由此可见，康熙皇帝为了独立解决与我们以前所讲过的相类似的问题，曾经做出何等努力，实在令人钦佩之至。②

康熙通过这样刻苦的学习，掌握了丰富的数学知识，成为我国历史上最有数学素养的封建帝王。在北京图书馆有一本满汉合璧的《三角形论》，题“康熙御纂”，很可能是康熙的数学著作。他经常和大臣们讨论数学问题，或进行实际应用，例如康熙三十一年（公元1692年）正月的一天，在乾清门“与群臣论算数”③。康熙五十年（公元1711年），他又与直隶巡抚赵宏燮④讨论数学问题，并说：“算法之理，皆出于《易经》，即西洋算法亦善，原系中国算法，彼称为‘阿尔朱巴尔’，‘阿尔朱巴尔’者，传自东方之谓也。”⑤其中“阿尔朱巴尔”显然为

①② 白晋著、赵晨译：《康熙皇帝》，1981，黑龙江人民出版社，第35页。
③ 蒋良骐：《东华录·康熙四九》。
④ 燮音谢xiè。
⑤ 同③，《康熙八九》。

algèbre（法文）之译音，今译为代数学。可见西方的代数学已在康熙时传入我国，但说“原系中国算法”是有问题的。①同年二月他到通州巡视通州河堤，并到河西务（在今北京市东南，归天津市管辖），“亲置仪器定方向，钉桩木以纪丈量之处”，与在场的人们讨论数学。②

康熙还很重视科技人才。1705年夏他到南方视察时，三次把梅文鼎召到船里。梅文鼎趁机把《平三角举要》进呈于他。③1709年他又召见精通数学的学者陈厚耀（公元1648—1722年），还问及梅文鼎。④

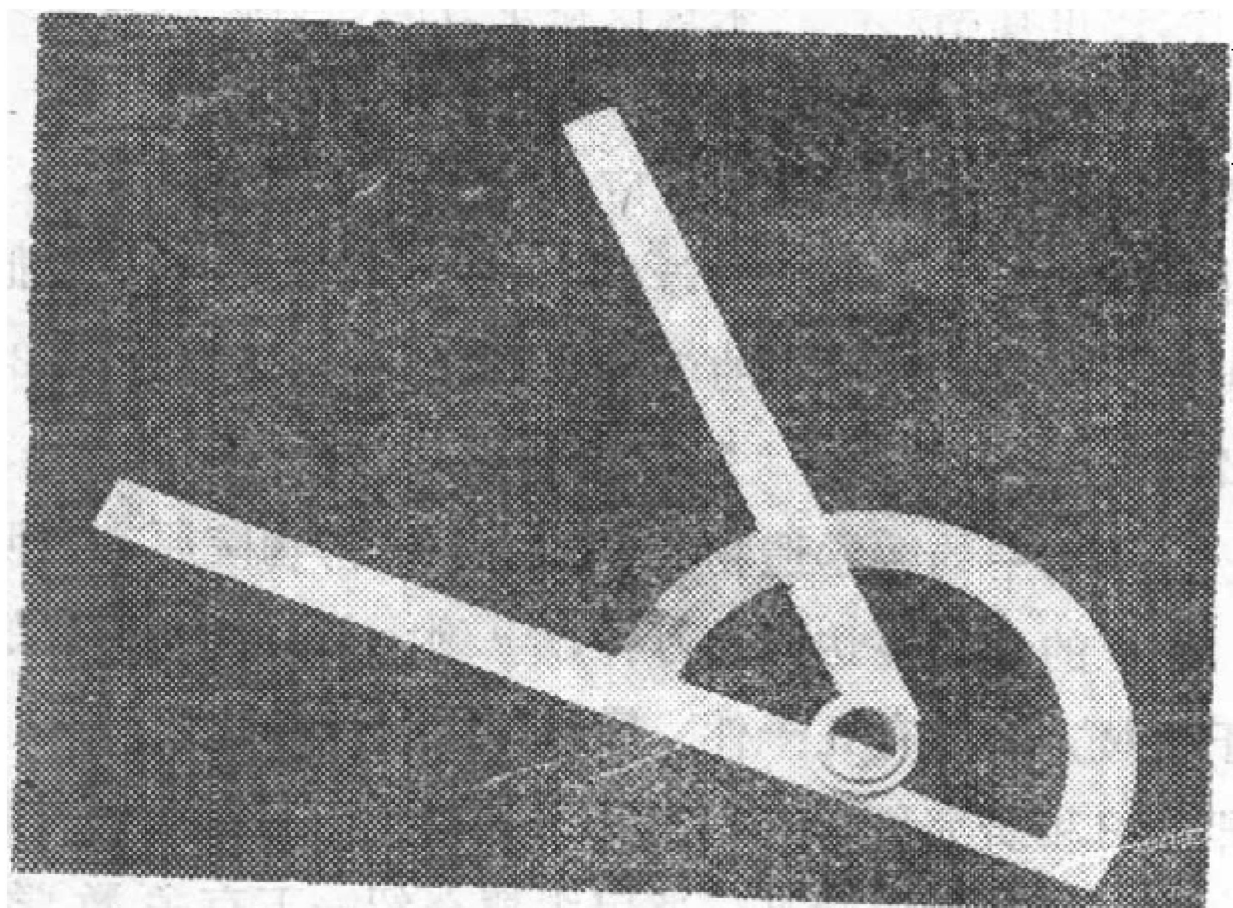
3．清宫中的数学遗物。现在的故宫博物院原来是明清的皇宫。那里的遗物多达九十万件，⑤绝大部分都是清代的，其中属于科技方面的有几千件。康熙年代的所占比例较大，无疑是康熙学习和研究科学时用过的。有些还刻写着“康熙御制”字样，也有些是外国制品。这里主要介绍一下有关数学的遗物。

清宫的数学遗物，大致可分为两类，一类是仪器和工具；一类是数学书。其中有些可能不是康熙时代的。

分厘尺：故宫藏有多种质料的分厘尺。它们的精确度都达到尺长的$\frac{1}{1000}$。每尺分成十大格，并画十条与尺边平行的线。第一大格又分为十小格，每小格之间画一条斜线。

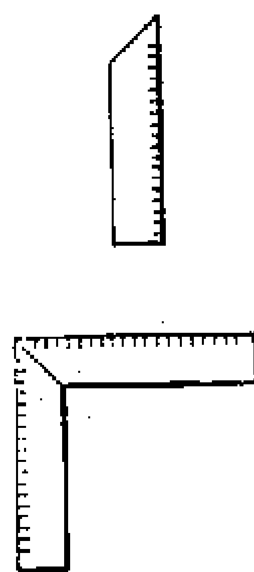
① 西方的代数学起源于阿拉伯数学，欧洲人可以说来自东方，但不是来自中国。
② 《清史稿·本纪八》。
③ 李俨：《中算史论丛》第三集，1955，科学出版社，第571页。
④ 焦循：《里堂道听录》卷八。
⑤ 华摈：《从故宫到博物院》，《紫禁城》，1980，第1期。

角尺：是一种量角器。它是在半圆弧的中心处安装一个能在半圆弧上自由滑动的尺（图3—26）。通过滑动的尺和半圆上的刻度测量角度。每个尺上都有“康熙御制”字样。



3—26 角尺

矩尺：是铜制的，其中有两件形状一样，为“巴黎制造”，另一件虽未刻铭文，但刻度与清代尺度一致，因此应是我国自己制造的（图3—27）。



3—27 矩尺

此外，还有半圆仪、双半圆仪、画图长方半圆仪、仰角仪等等多种，都与测量有关。在一台半圆仪上刻着“康熙御制”和“岁次甲午年制”字样，可知作于康熙五十三年（公元1714年）。

还有“假数尺”、立体几何模型和原始手摇计算机多种，将在以后介绍。比例规和纳白尔算筹前已提及，不再重述。

故宫的数学书分藏于宫廷组仓库和图书馆两处。前者是作为文物保藏的，有数十部之多，内容都是数表。这些书籍包括《御制数表精详》、《对数广运》、《方寸数目》、拉丁文的《正弦、正切、正割以及对数》等等，各种内容的都有，也有比重表等等。在《正弦、正切、正割以及对数》中已经正确的使用了小数点。

后者，即故宫博物院图书馆的藏书中有一些是清宫原来的数学书。其中《几何原本》，共有三种，即满文《几何原本》七卷三册，抄本；汉文《几何原本》七卷附《算法原本》一卷共一大册，抄本；汉文《几何原本》十二卷附《算法原本》二卷共四册，抄本。第二种本有序称："几何原本〔数原之谓，利玛窦所著，因文法不明，后先难解，故另译〕乃度数万物之根本"，可见这个本子是从另一种《几何原本》重新译出的。三种本子的内容大体相同，可见是来源于一个底本。很可能就是当年张诚、白晋等给康熙皇帝讲几何时的用书。还有一本《三三等数图》，主要讲纵横图，都是正方的，由三阶至八阶，并有构造法。

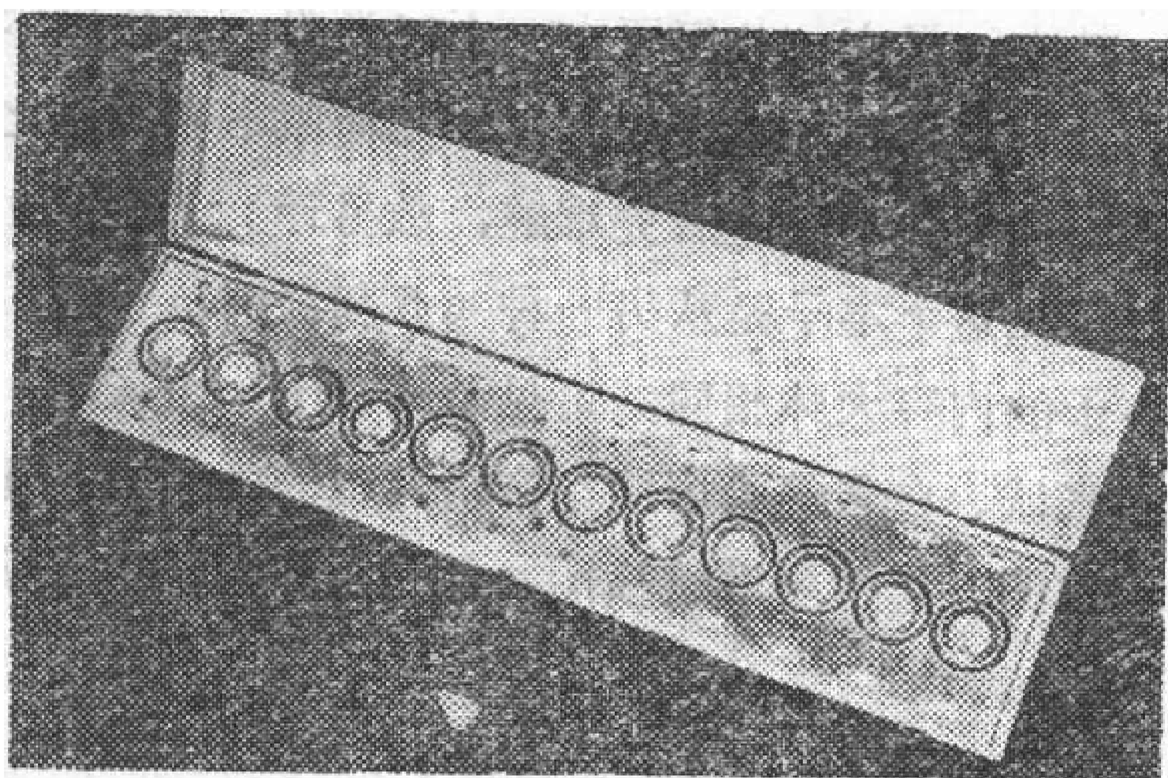
手摇计算机的制造

近代手摇计算机是法国科学家帕斯卡发明的。他于1645年制造成功第一台加法计算机，是通过齿轮进位的。德国数学家莱布尼兹约于1671年发明了能计算乘法的计算机。这两种计算机什么时候传入我国的，目前尚不清楚，不过在康熙年间我国已经有了手摇计算机。

本世纪六十年代初，曾发现故宫博物院藏有两台手摇计算

器①，七十年代又发现八台，共十台。均已修复。②这些原始手摇计算机可以加减乘除。它们的结构，可以分为盘式和筹式两种类型。下面分别作一介绍。

1. **盘式原始手摇计算机。**这类计算机的内部构造都是用黄铜做的。有的表面镀金，或兼镀银，有的装在红漆木盒内。它们的外形都是长方体，有大小两种，圆盘多少也不同。一种有两台，均长55厘米、宽11.5厘米、厚4.8厘米，十个圆盘。另一种宽、厚与前者相同，而长60厘米，十二个圆盘，有四台，图3—28为其中之一。圆盘的个数表示位数，都分为两

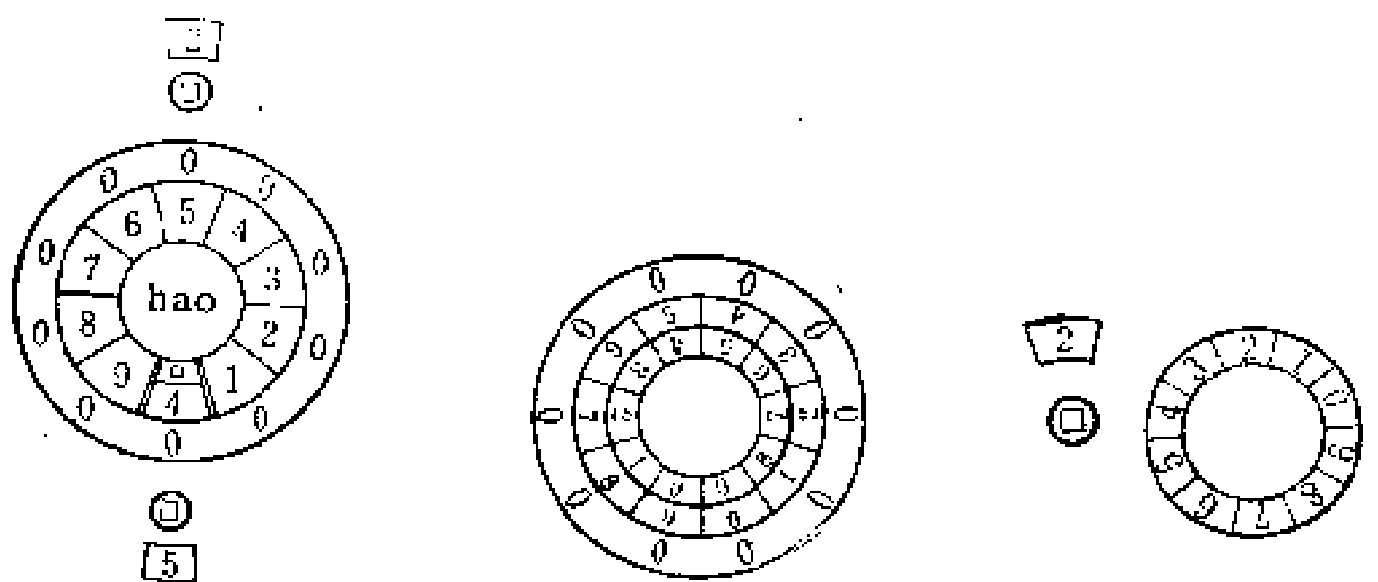


3—28 十二个圆盘的盘式计算机

层。表面一层固定不动，称为上盘，其下有一层可动的圆盘，称为下盘（如图3—29(a)、(b)）。上盘的直径都是3.6厘米，中央都刻有数位名称，其排列顺序自左至右，分别是"拾万"、"万"、"千"、"百"、"十"、"两"、"钱"、

① 严敦杰：《故宫所藏清代计算器》，载《文物》，1962年第3期，第19—22页。

② 白尚恕、李迪：《故宫珍藏的原始手摇计算机》，载《故宫博物院院刊》1980年第1期，第76—82页。



（a）盘式计算机的圆盘　（b）下盘　（c）数据盘

3—29

"分"、"厘"、"毫"，或用拉丁拼音："sevan"、"van"、"cien"、"poo"、"se"、"lean"、"cien"、"fuen"、"lie"、"hao"。十二个圆盘的则多"百万"和"千万"两个单位。其周围分十个格，按逆时针顺序排列着九个阿拉伯数：1、2、3、4、5、6、7、8、9。下面是一个空格，里面有一能前后移动的铜挡片，移动它可以看到下盘两种刻数的一个数码。

下盘的直径均为4.8厘米，表面上四个等距同心圆把盘分成四层：最外一层有十个均匀分布的圆孔，中央是个空白圆，正好在上盘的数位名称之下。第二、第三层分别刻着顺、逆时针排列的十个数码，被上盘遮住九个，有一个可在空格中露出。

每个下盘之下都连接一个十个齿的齿轮，下盘转动，齿轮也随之转动。转动十个数码，通过齿轮传动使下一个下盘转过一个数码，上盘空格的读数增加1或减少1，按顺时针转下盘加1，按逆时针则减1，体现进位和加减法运算以及由此而产生的乘除运算。

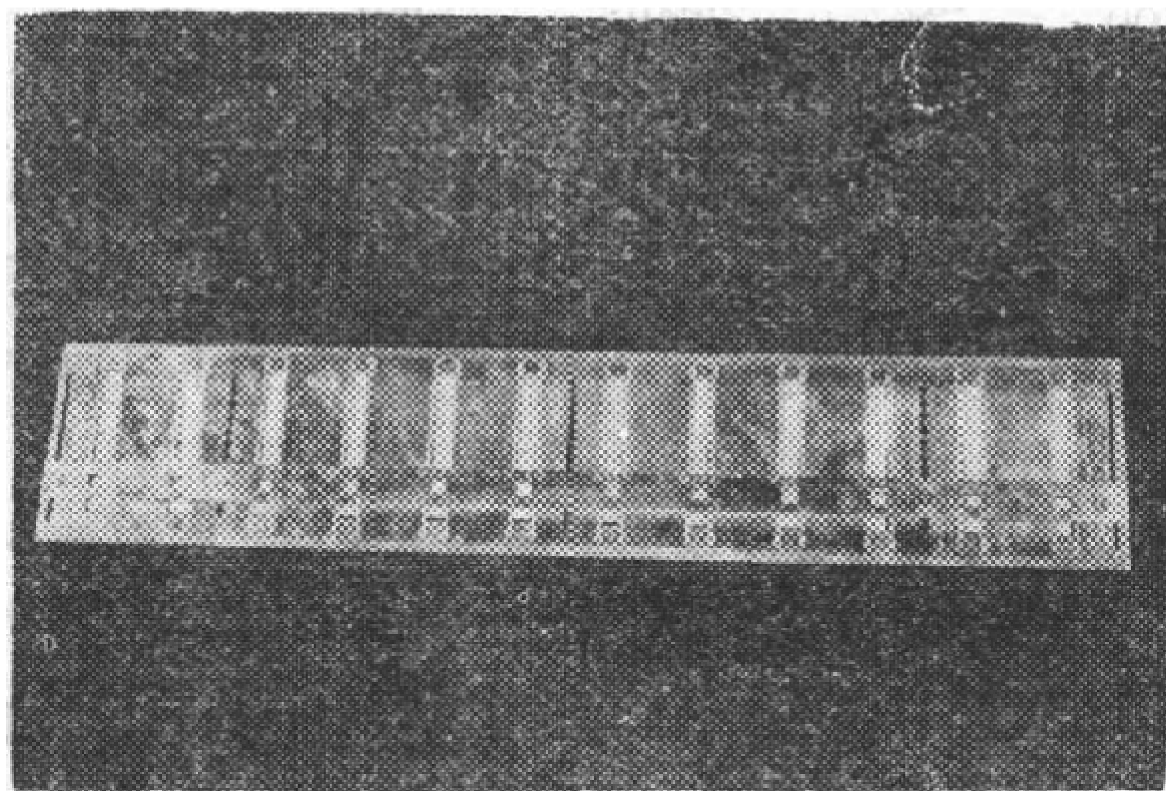
在每个圆盘上方和下方都有一个扇形孔，孔下都有一小圆盘，上有十个数码（图3—29(c)）。小圆盘的数码有一个在扇形

孔中露出，这就是读数的一位或运算时的某一已知数的一位。

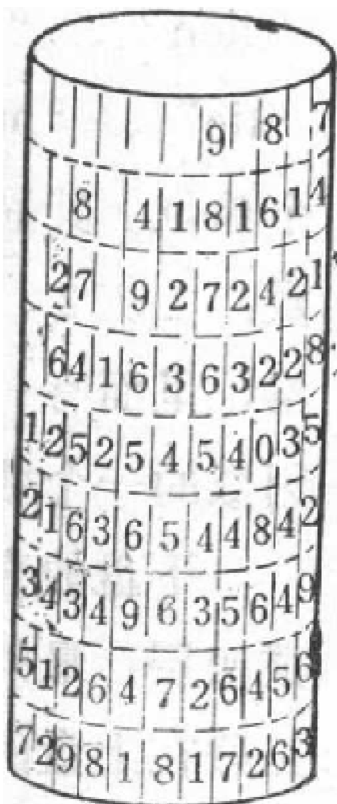
盘式计算机可以计算加、减、乘、除，既能由高位起算，也可由低位起算。加、减法是很简单的。

2. 筹式原始手摇计算机。这类计算机也都是黄铜制的，外形呈长方体形，从大小来看又分三种型号。

第一种一台，长60厘米、宽12.5厘米、厚4.5厘米。在表面上开有十二个长8.8厘米、宽0.8厘米的长方孔。每个孔下有个圆柱形的筹滚（图3—30），其上贴着用象牙制的中国式纳白尔算筹（图3—31）。筹上的一竖行数目字正好从一长方孔露

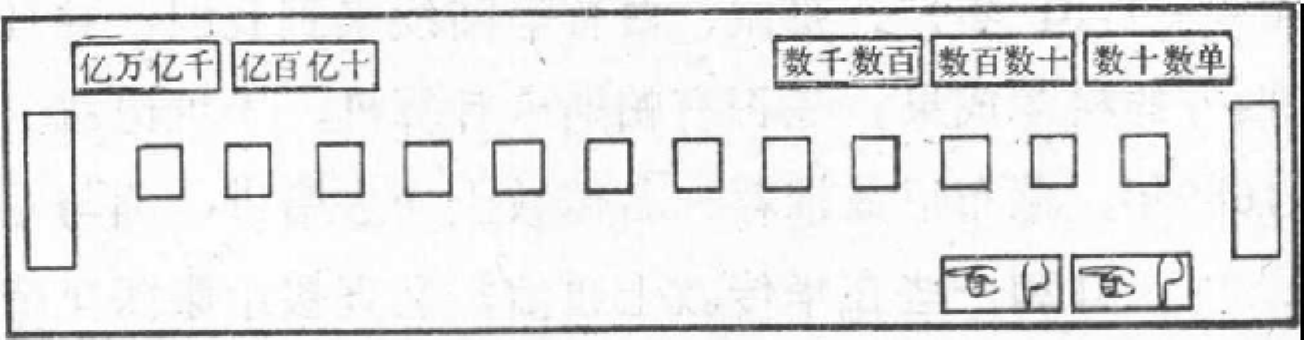


3—30　十二个长方孔的筹式计算机



3—31　牙筹圆滚

出。在长方孔的上端都由右而左写着“末”、“二”、…“十二”字，而在下端这些字下都加一个“位”字，表示第几位。很显然，这种计算机最多数字为十二位。在计算机上面有长条形的游标（图3—32），可上下平行移动。其上有十四个方孔，中间十二个可看出筹上的十个数码。孔的上方从右至左分别刻着“单数、十数”、“十数、百数”……“千亿、万亿”

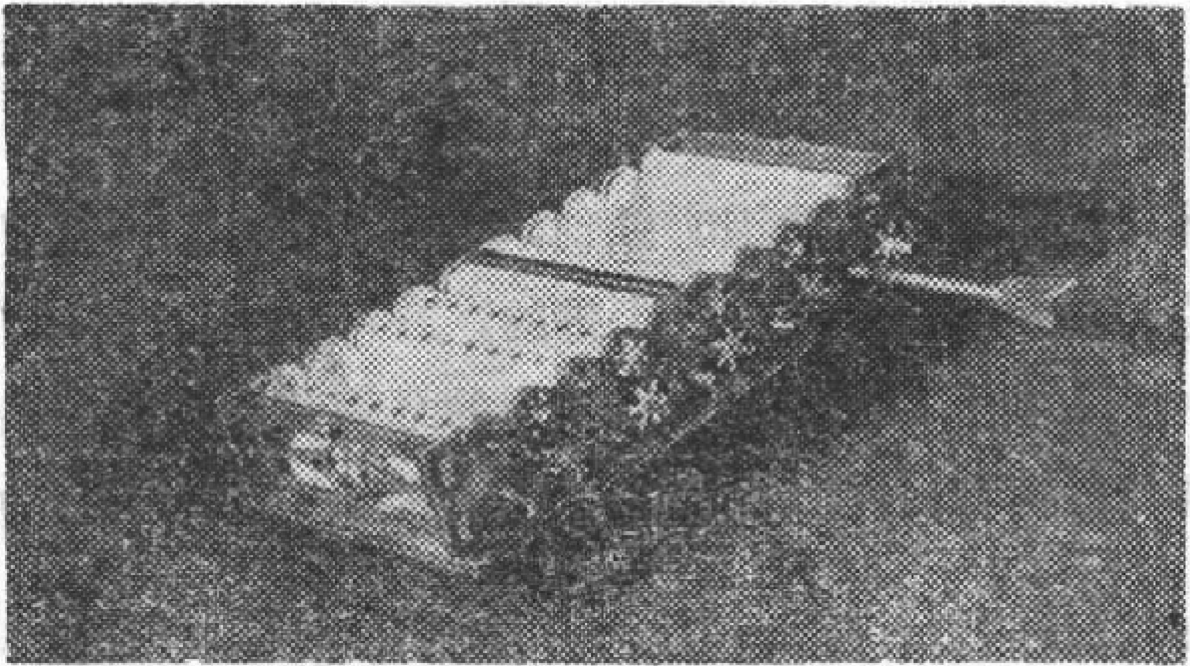


3—32 游标示意图

字样。

第二种二台，长58厘米、宽12.5厘米、厚4.5厘米。在面上有十个长方形孔，孔下有十个牙筹滚，可表示十位数。

第三种一台，长17厘米、宽9厘米、厚5厘米。它的面上有十一条细缝，通过相邻的两条细缝可穿过一张画着中国式纳白尔算筹的纸片缠在十对圆滚上，表示十位数。在圆滚的一端安有六个齿的齿轮，在两齿轮之间还有六个齿的齿轮，以便使纸筹的旋转方向相同（图3—33）。



3—33 纸筹计算机的内部结构

计算的原理是根据纳白尔筹进行的，无需再作解释。

3. 欧洲计算机与中国计算机的关系。十七、八世纪之间，法国与我国的关系较为密切。康熙二十六年到四十年（公

同的灰烬层和烧过的石块与兽骨。这说明那时在我们伟大祖国的大地上已经出现了原始文化的萌芽。一万多年前生活在北京周口店的“山顶洞人”已有一定的文化，他们的活动范围由打猎和采集野果发展到捕鱼，进入多种经济并存的时代。“山顶洞人”已经有了美的观念和原始宗教意识，他们懂得了缝纫和染色，所用工具除石器外还有骨器。考古学家们认为“山顶洞人”已进入旧石器时代① 末期。

我国大约于一万年前开始进入新石器时代。约七千年前的浙江余姚河姆渡原始社会遗址是我国早期新石器时代社会的典型代表。河姆渡人不仅能制造精美的石器，而且能烧制多种陶器②，能够使用骨制农具种植水稻。还有木构建筑遗址的发现，保存至今的一些木构件上有长方形和圆形榫卯③。

在距今约六千年前的西安半坡新石器时代遗址中，有建筑遗迹群，说明当时已出现了原始村落。房屋的平面图有圆形的、长方形的，也还有近似正方形的。半坡遗址出土了大量的彩陶，这说明当时不仅制陶技术有了很大提高，而且在艺术方面也有了进步，出现了比较多变的图案，反映出当时人们已有了一定的抽象能力。此外在半坡还出土了大批石制、骨制的农业生产工具、渔猎工具、手工业工具和其它器具，而且磨制得很规则，这些清楚地表明当时人们已有了各种几何形状的观念。

新石器时代，人们已能够制造多种多样的工具和器物。到

① “旧石器时代”是原始社会的前一个阶段，其特征是生产工具主要为打制石器。后一个阶段，主要为磨制石器，称为“新石器时代”。

② 陶器不是河姆渡人发明的。

③ 榫音损 sǔn，两物凹凸相接的凸出部分叫榫，凹下部分叫卯。

了原始社会末期，我们的祖先已能炼铜。由于人们活动范围的不断扩大，为数学的起源创造了条件。事实上，在人们和自然界的接触以及各种活动中，数学的研究对象——空间形式和数量关系必然以某种形式反映到人的头脑中来，再经过人们的思维作用逐渐形成了某些数学观念，并进一步抽象成数学概念。最初数目的出现和几何图形的绘制就是这种抽象的结果。

数的概念的起源

数的概念是人们长期在数目观念的基础上所产生的认识上的飞跃，因此数的概念的起源是相当早的。

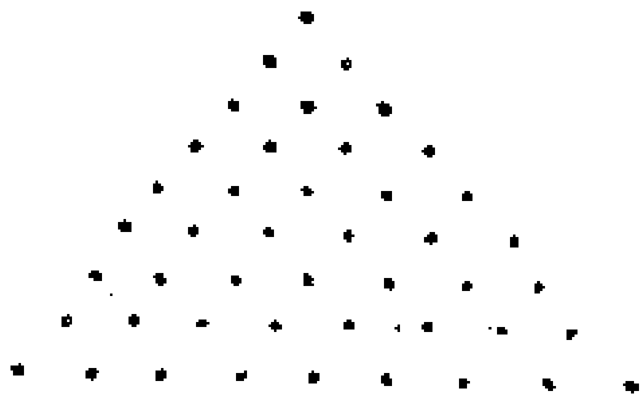
1．出土文物反映的数目观念。数的概念在我国的起源，可以追溯到原始社会。当时人们对数目的认识，最初是从“一”和“多”开始的，后来才逐渐有了“二”、“三”等数目观念。这种原始的数目观念只是作为一些物体的个数而形成的。它们是一种基数反映到人的头脑中。起初，人对数目的认识都是和具体的对象联系在一起的，没有离开对象的抽象的数概念，例如说一只羊、两根木棒等等。用手指计数是通过简单的对应关系而“数”出某种物体的个数，这已经是一种进步了。

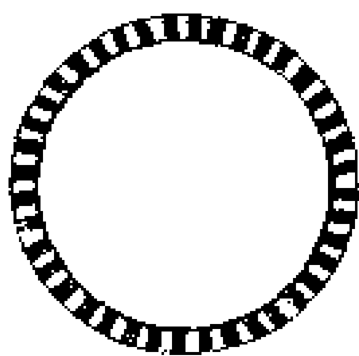


1－1 河姆渡陶器上的四叶纹

在出土的原始社会文物中，我们可以看到一些与数目有关的内容，例如河姆渡的骨耜有两个孔，半坡的尖底提水

器有两个耳。在其它陶器上有两耳或三足，在河姆渡的陶钵底上刻着四叶纹①（图1—1），这是形成“二”、“三”、“四”等数目观念的依据。半坡的陶器上有整齐排列的点点，由一个到八个或到九个②，可以说是“八”和“九”的反映（图1—2）。还有一些陶器上有近似等分圆周形的刻纹，很规则，有的正好为八十等分（图1—3），如河北磁县下潘汪村出土的四五千年前的陶器上就有这种例子③。至于是否有意识地进行等分和有较大的数目观念，不好确定。


1—2　半坡陶器上的点子


1—3　陶器上的八十等分圆周

2．各种原始记数法。《易·系辞传》上说：“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”，说明结绳记数和刻划记数是当时带有普遍性的记数方法。至于中国的结绳起源于何时，很难回答，有些古籍上说轩辕（黄帝）、伏羲、神农等很长一段历史传说时代都是“结绳而用之”④，或说伏羲“结绳而治”⑤。如果说结绳是我国新石器

---

① 浙江省文管会、浙江省博物馆：《河姆渡发现原始社会重要遗址》，载《文物》1976年第8期，第8页。

② 中国科学院考古研究所、西安半坡博物馆：《西安半坡》，1963，文物出版社，图版壹肆玖。

③ 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第79页。

④ 《庄子》卷十郭家子玄注引“司马”说。

⑤ 《北堂书钞》卷十二引《典论》。

时代广泛使用的记数方法的话，恐怕是不会错的。三国时吴人虞翻[①]在所著《易九家义》中引汉郑玄的话说："事大，大结其绳；事小，小结其绳，结之多少，随物众寡。"这里把结绳的用法说得很清楚。现已找不到早期结绳的实物资料。外国的结绳事例很多，可以作为认识我国结绳记数的参考。例如在日本的冲绳等地直到明治年间（公元1868—1911年）人们还调查到结绳的遗物，当地人把结绳叫做"藁算"[②]。

刻划记数在我国也起源于原始社会。根据现有考古发掘资料，最早可以追溯到一万多年前的"山顶洞人"。在"山顶洞人"的遗址中出土了四个带有磨刻符号的骨管[③]，可能是一种刻划记数的实物。

这四个骨管上的符号为横向磨制，形状多数是圆点形，有两个长圆形（图1—4）。其中有一个围着骨管形成半圆，展开成平面，则为一长条形。骨管A，相对的两个侧面分别有一个圆点和两个圆点，共三个；骨管B，相对的两个侧面，一面三个圆点，一面两个，共五个；骨管C，相对的两个侧面，一面两个，一面一个，在另外一侧又加一个长圆点，共四个；骨管D，只有一个长条形的符号。从这些符号的排列方式，我们可以推测出"山顶洞人"对于数目的一些观念。"山顶洞人"最基本的数目是一，用一个圆点表示，两个圆点并列的是二，三个圆点并列的是三。同时可以看到，骨管对应两侧的符号带有累计的意义。一个加两个是三个，两个加三个是五个。长圆

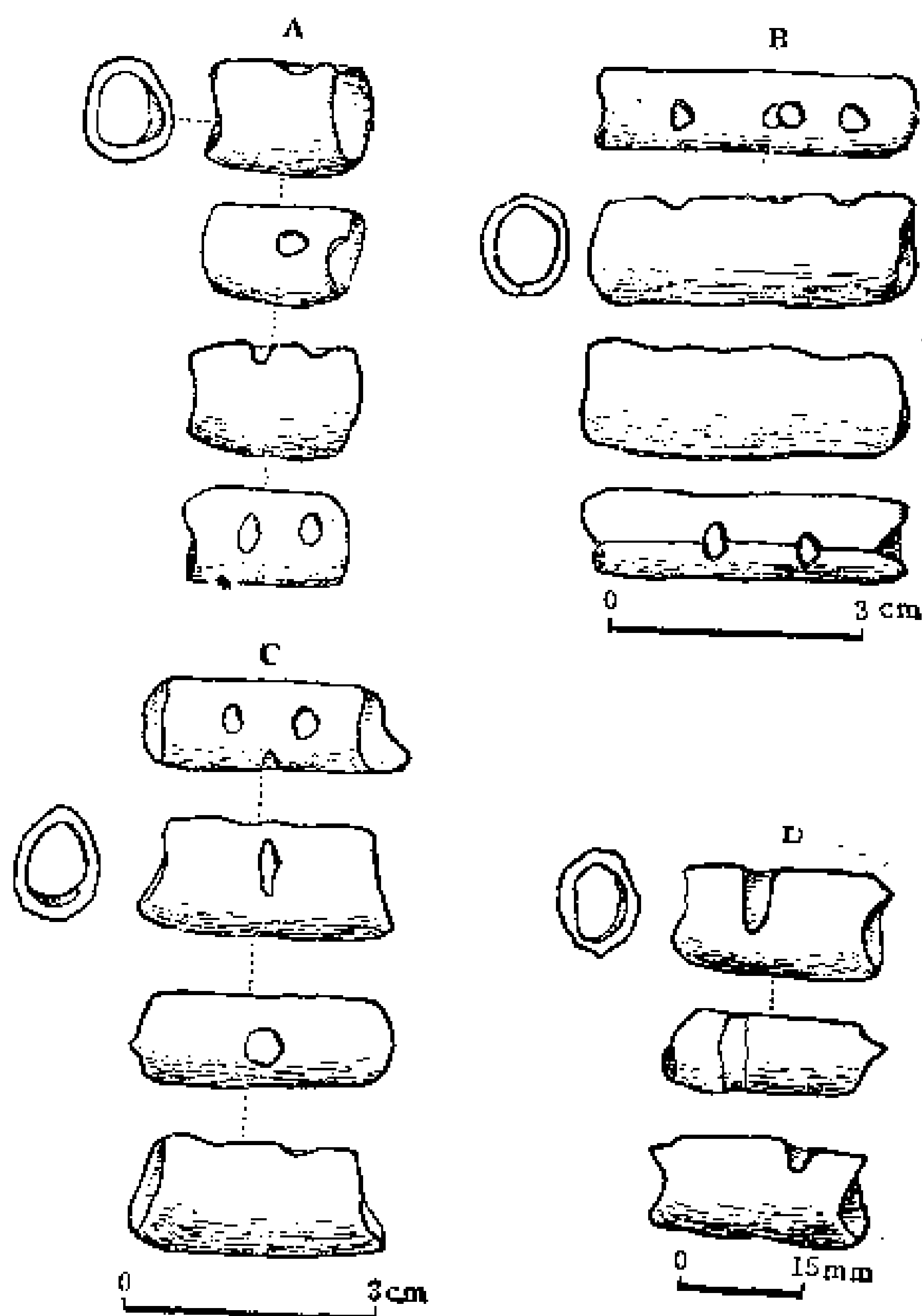
---

① 翻音河hé。

② （日）长滨　章：《结绳および记标文字》，《数学史研究》通卷第73号（1977年4—6月），第1—41页。

③ 裴文中：《周口店山顶洞文化》（英文版），1939，Peking，P.30。

形可能是代表“十”。如果把这些骨管都展开成平面，其上的

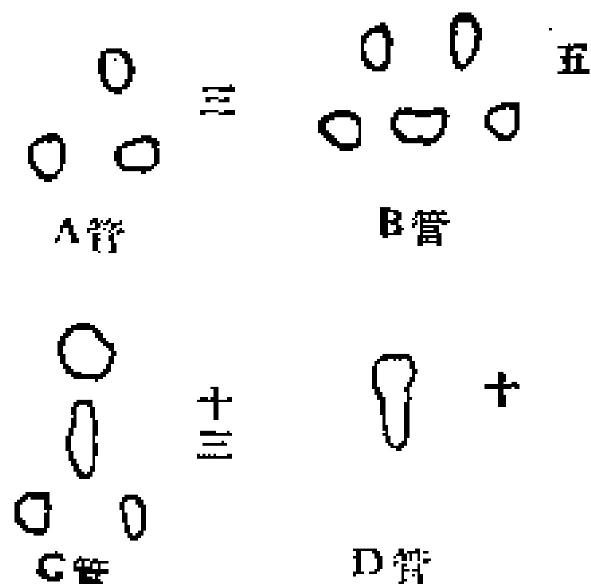


1—4　山顶洞人的刻符骨管

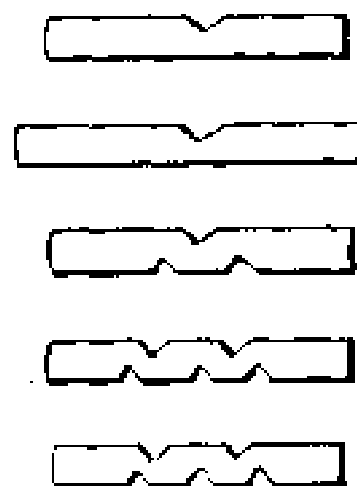
符号排列如图1—5所示的那样，它们分别应代表“三”、“五”、“十三”和“十”，这反映着一种十进制的思想，这一点很重要。

刻划记数的方法沿用了较长时期。到了原始社会末期，甚至到了奴隶社会和封建社会，都可以找到这方面的资料。例如在青海省乐都县柳湾原始社会末期的遗物中有带刻口的骨片

（图 1—6）四十件。在骨片的中部一侧或两侧刻有三角形的小口，其中的三十五件上各有一个，三件上各有三个，两件上各有五个，被认为"大约是用作记事、记数或通讯联络用的"。①这样解释有道理。刻口的排列方式和山顶洞人的骨管刻划非常相似：三个口的是在骨片的一侧有一个口，另一侧有两个口；五个口的是一侧有两个，另一侧有三个，这么多带刻口的骨片，说明它们不但用于记数，而且有可能用于简单的计算，由一到五十四之间的任何一个数都可以用这些骨片迅速地摆出，比如"四"用一个带三个口的和一个带一个口的骨片代表，"十五"用两个带五个口的、一个带三个口的和两个带一个口的代表等等。把这种骨片看作是一种原始的计算工具是并不过分的。



1—5　山顶洞骨管展开

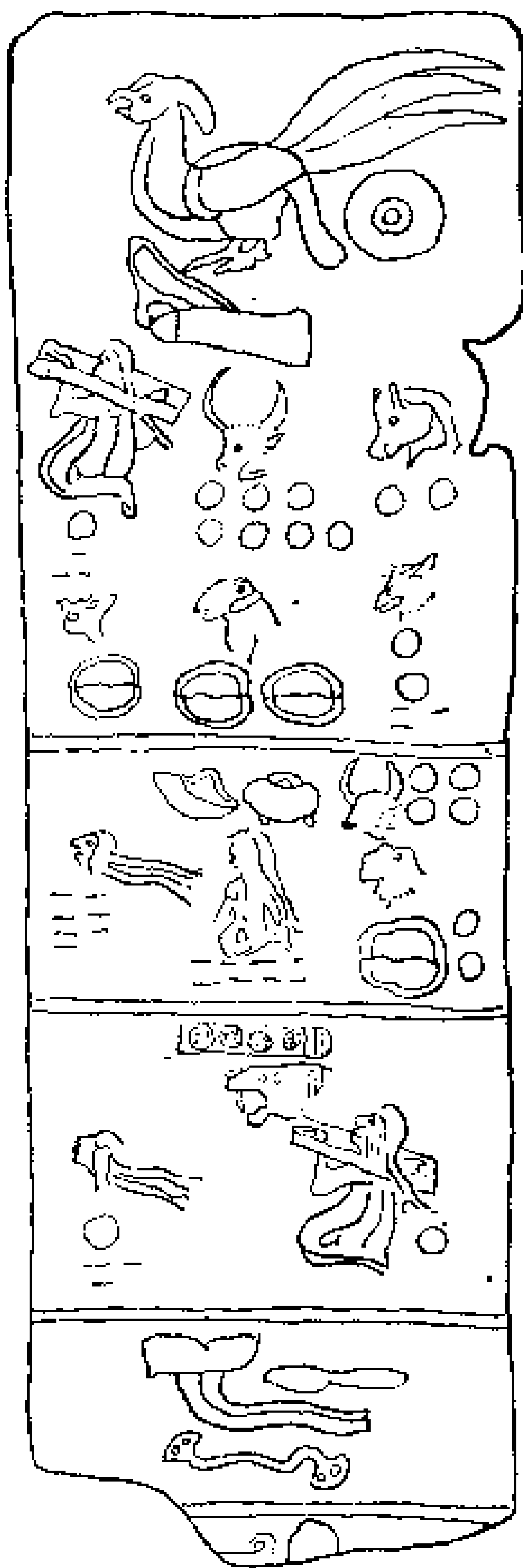

1—6　带刻口的骨片

在云南晋宁石寨山出土的一块青铜片上有图画文字，其中包括着记数方法（图 1—7）。铜片为长方形，下残，现存者图画部分分为五段，末段只剩一个边。②记数用三种符号表示，即"—"、"○"和"⊜"，分别代表

① 青海省文物管理处考古队、中国科学院考古研究所青海队：《青海乐都柳湾原始社会墓地反映出的主要问题》，载《考古》1976年第6期，第365—377页。

② 林声：《晋宁石寨山出土铜器图象所反映的西汉滇池地区的奴隶社会》，载《文物》1975年第2期，第69—81页。

个、十和百。例如最上一段画着一个带枷的人，下面有一个“○”和三个“—”，可能是表示这种带枷的人有13个。还用同样的符号记载牛、马、山羊、绵羊、老虎以及人的数目。这里的记数方法，显然也是十进制的。此项资料虽然是奴隶社会的，而且在时间上已晚到西汉时期，但是反映了我国早期记数方法的一种遗制，或许是当地少数民族创造的。

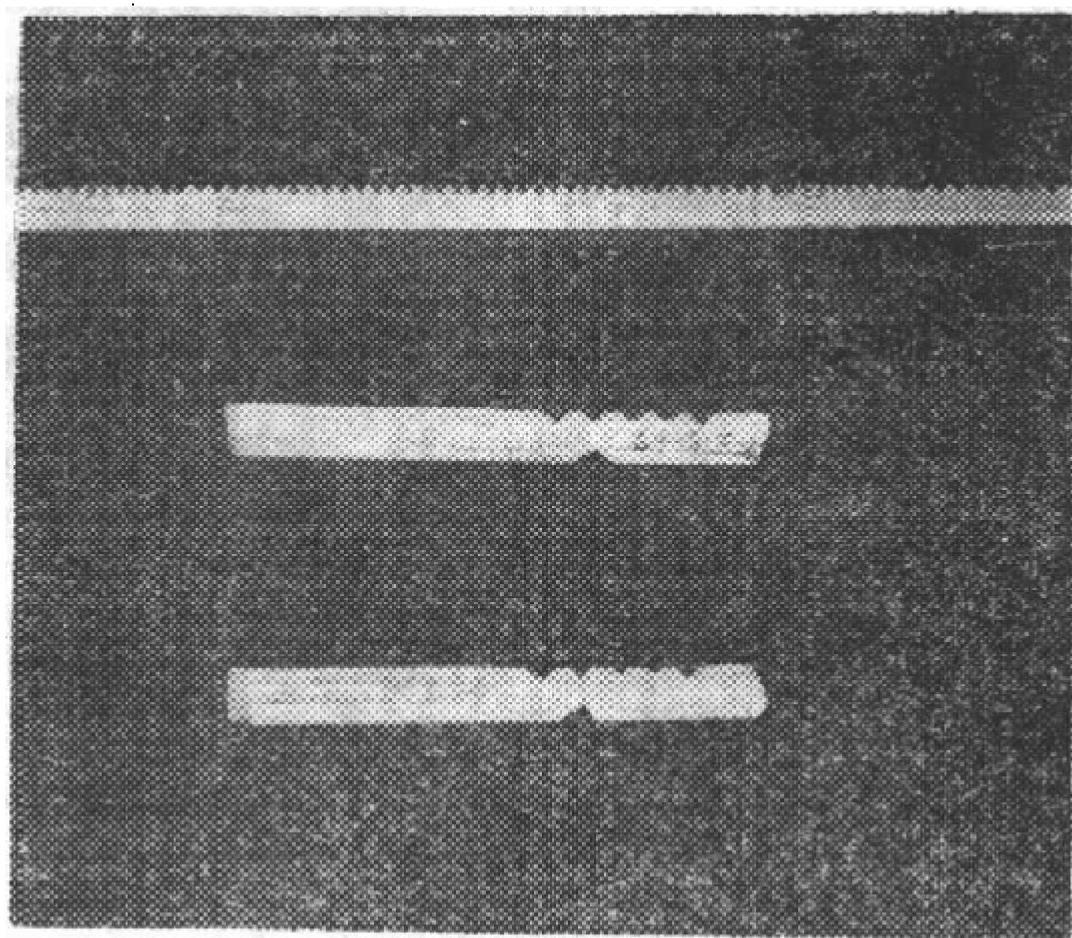


1—7　云南古代刻符记事铜版

3. 少数民族的记数法。我国的少数民族和汉族一样，在没有文字以前也都是采用结绳和刻划记数方法①。建国后，在云南等地收集到不少这方面的实物。北京中央民族学院少数民族文物展览室陈列着瑶族和卡佤族刻竹记事的两块竹牌（图1—8）以及台湾高山族结绳记事等的实物。云南福贡地区的傈僳族直到五十年

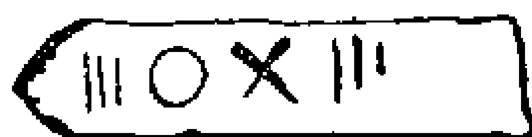
① 李俨：《上古算学史》，载《中算史论丛》第五集，1955，科学出版社，第1—14页。

代还用在木板上刻划的符号记事或表意。例如在一块木片上刻



1—8　卡佤族刻竹

着四个符号（如图1—9），表达的意思是："三个人（Ⅲ），月亮圆时（○），和我们见面了（×），现在送上大、中、小三包土物，分别送给大、中、小三个领导（Ⅲ）。"①云南澜沧拉祜族自治县的拉祜族，直到1957年还用木刻记载家禽、家畜的帐目（图1—10）。例如一块记鸡数的帐目木牌是这样的：在木牌的正面和侧面都刻着缺口，侧面的一个缺口表示一千只鸡，正面一个缺口表示十只鸡。这块木牌的侧面有四个缺口，正面有二十个缺口，因此总



1—9　傈僳族刻木

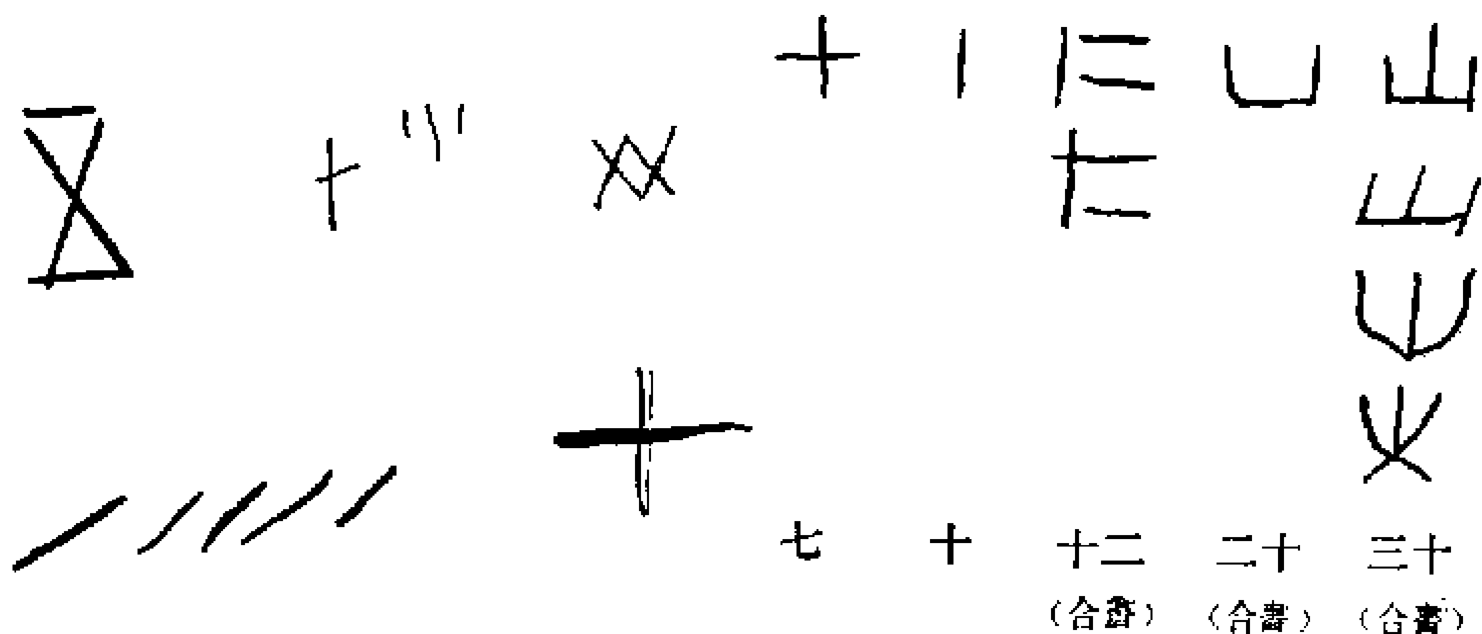
① 李家瑞：《云南几个民族记事和表意的方法》，载《文物》，1962年第1期，第12—14页。

共表示四千二百只鸡。① 云南红河元阳地区的哈尼族人买卖田地时，常常用单股的麻绳打成结，标志田价银子数。每个结代表一两银子，结与结之间的距离相等，表示单位相同。如果最后距离只有一半，就表示半两。这种打结麻绳，买卖时要制同样的两根，双方各执一根②。在新疆巴里坤草原的哈萨克族牧民至今还用羊毛绳打结记羊数③。这些都是古代结绳记数的遗风。



1—10 拉祜族等的刻木与结绳

4．数目字的出现。在结绳和刻划的基础上，进而形成数目字。在半坡出土的陶器上刻划的符号中就包含了数目字，计



1—11 上海马桥遗址出土陶器上的刻符　　1—12 城子崖出土陶片上的数目字

①② 李家瑞：《云南几个民族记事和表意的方法》，载《文物》，1962年第1期，第12—14页。

③ 本条资料系新疆哈密铁二中刘志铭同志提供。

有"×"（五）、"∧"（六）、"+"（七）、")("（八）、"|"（十）、"‖"（二十）①。在陕西姜寨出土的陶器上也有数字符号，比半坡的多"—"（一）、"‖|"（三十），而少")("②。这也是一种十进制系统，与前面的记数法完全相同。在距今四千年前的上海马桥遗址出土的陶片上有"X"、"|"和"+"，相当于五、一(或十)和七③（如图1—11）。年代与马桥差不多或稍晚的山东城子崖出土的陶片上刻有五个数目字即相当于七、十、十二、二十、三十，后三个数是合书（图1—12）。

事实说明，约四千年前我国的数字写法发生了一次重大变化，如"×"变成了"X"，"‖"变成了"∪"，"|||"变成了"ⱶ"。十的倍数采用"合書"的形式，对后世影响很大。很显然，这种改变有明显的道理，因为原来的写法容易发生混淆，如"×"与"+"，"|"、"‖"、"|||"与"—"、"="、"≡"，孤立来看就分不清了。通过长期实践，当人们发现这种混淆时，必然要想到改变写法。城子崖的数目字"与甲骨文早期为近，和殷文化是一个系统"。④但是比甲骨文早数百年到一千年。

几何的起源

几何的起源，在我国同样很早，它萌芽于旧石器时代，或

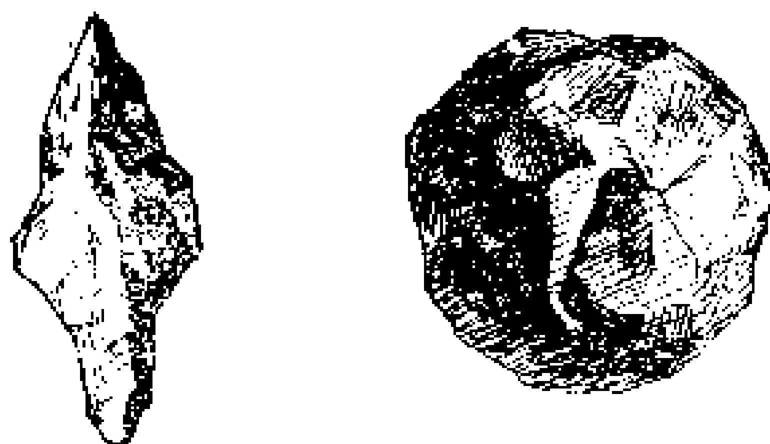
①② 王志俊：《关中地区仰韶文化刻划符号综述》，载《考古与文物》，1980年第3期，第14—21页。其中"八"为笔者所提出。

③ 上海市文管会：《上海马桥遗址第一、二次发掘》，载《考古学报》，1978年第1期，第109—137页。

④ 董作宾、傅斯年、郭宝钧：《城子崖》，1934，南京出版，第71—72页。

许比数目观念的起源还要早。因为人们在从事生产或其它活动中，自然界一些物体的形状、大小和位置关系会逐渐反映到人的头脑中来，人们通过不断地思考、抽象，便有了形的初步观念。

1．**早期石器的几何形状。**原始人制作石器的目的是把它作为工具使用，制造时必然要考虑大小和形状。形状思想的产生和数目观念一样，要有个过程。以自然物的形状为模特儿，经过反复观察、思考而形成某些简单形状的观念。如观察一些圆形水果可以产生球的观念；观察一些平展的植物叶子和平静的水面容易形成平面的观念；观察一些直的树干和直的树枝容易形成圆柱或直线等观念，等等。从观察自然物产生的简单几何观念用来考虑石器的形状，再根据要制作的石器的功能确定采取什么形状和大小。用于砍削的石器要做得平一些，象石刀、石斧等属于这一类。它们的每一个面都是近似的平面。北京猿人使用的石器中有很多片状的，还有考古学上称为尖状器的石器，从几何形状来说，是一种近似的锥体（图1—13）。在山西省襄汾县丁村发现了一批几万年前原始人制造的球形工具（图1—14）。其中最大的重量在1500克以上，最小的在200

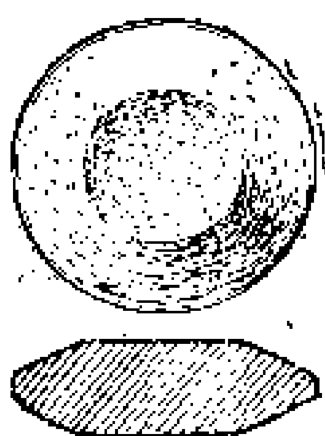


1—13　北京猿人的石锥　1—14　丁村人的球形工具

克左右，可能是用于打猎的武器，可见早在几万年以前，我们

的祖先已经有了球的观念。考古工作者还发现时代较晚的许多棒状石器，如在黑龙江省巴尔虎左旗和吉林市郊虎头砬子等地新石器遗址发现的石制棒状物，有扁的也有圆的，比较规则，说明柱体观念已有了进步。

从发掘的石器上还可了解到原始人的其它几何观念。例如1974年在云南省云县忙怀新石器时代遗址中发现的一百多件石器中，有一件圆饼状的石钻（图1—15），在另一件石器的平面上有纵横交叉的方格纹，说明在五、六千年前人们已经有了圆、平行和垂直等几何观念（图1—16）。



1—15　忙怀出土的石钻

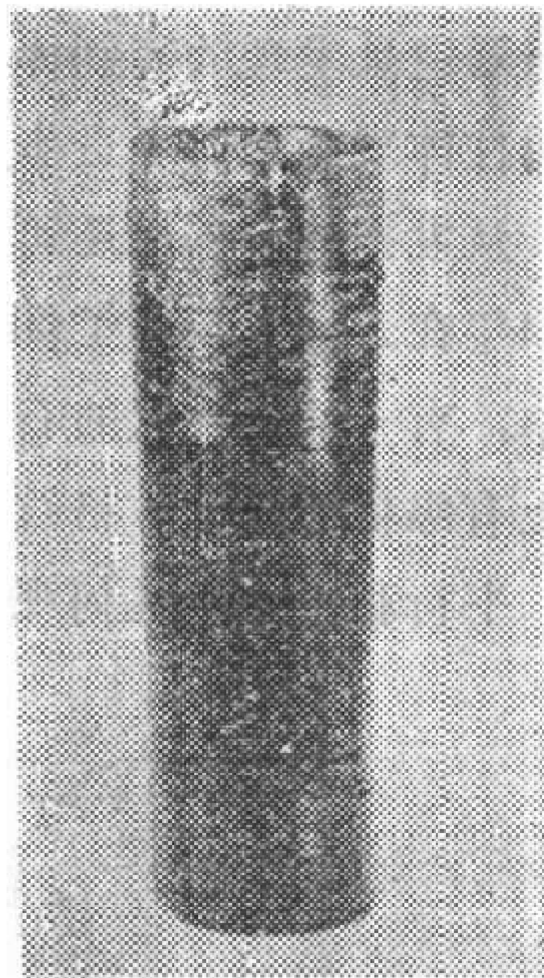


1—16　忙怀刻划平行线的石片

从各种不同形状的石器中，反映出原始社会随着社会生产的发展，人们逐渐有了平面、球、圆、柱、锥、平行、垂直等许多初等几何观念，是几何在我国萌芽的一种表现。

在新石器时代的其它遗物、遗迹上也反映着一些几何观念。如一万多年前的资阳人（今四川省资阳县）制作的三棱形骨锥，中间部分的三条棱基本平行，两端成锥形，因此中间呈三棱柱、两端呈三棱锥形。“山顶洞人”的骨针，磨得很圆，呈较规则的圆柱状。在稍晚的河姆渡新石器时代遗址中发现了四个木筒，很象一节竹筒，中空，壁厚约1厘米，厚度均匀，

上下平直，两头缠着藤篾①类的圆箍多道，是很规则的圆柱（图1—17）。在河姆渡还发现珠、丸、环等玉制的装饰品，具有球、圆、平行平面等几何特征。



1—17　河姆渡出土木筒

2．从陶器形状看原始社会的几何观念。陶器在新石器时代占重要地位。石器的形状在陶器上有了发展，多数器物的水平截面基本都是圆形的，口和底也多为圆形。如河姆渡出土的陶器大都是这种形状，有的敛口釜的外沿呈现多边形。

半坡新石器遗址出土的陶器，其几何形状丰富多采②。三足陶器，除了反映出“三”这个数目之外，还说明当时人们发现三足具有稳定性的特点，这是一个很重要的发明。在半坡遗址出土的大批陶器中，最简单的是纺轮。光是这种遗物就有50个，还有两个用石头磨成的。它们中间都有从两面钻成的小圆孔，大多数两面是平面；个别的只有底面是平的。侧面的几何形状有的是圆柱（图1—18），有的是圆台（图1—19）。与此相近的是一大批圆环。除了多数呈同心圆外，还有三个外圈带齿的特别形状，其中一个有六齿外突，一个有三十四个齿，一个有二十八个齿，齿距虽不是绝对均匀，但大体上差不多，说明

① 篾音灭miè，劈成长条的竹或藤片。

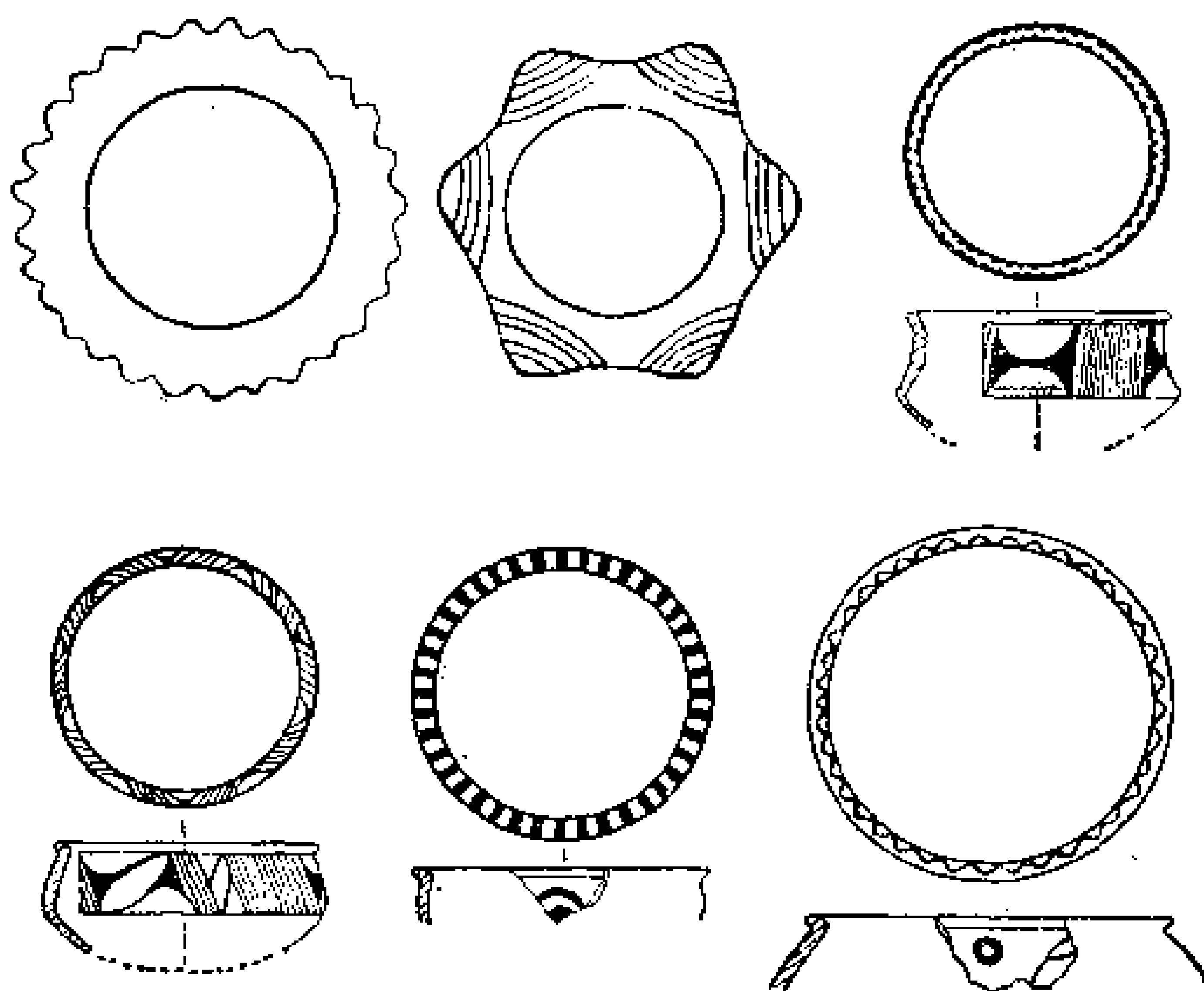
② 中国科学院考古研究所、陕西省半坡博物馆：《西安半坡》，1963，文物出版社。



1—18　半坡出土的圆柱形陶纺轮　　1—19　半坡出土的圆台形陶纺轮

那时已经有了等分圆周的思想。还有一大批大小不等的陶球，都很规则，说明球的观念已完全形成。

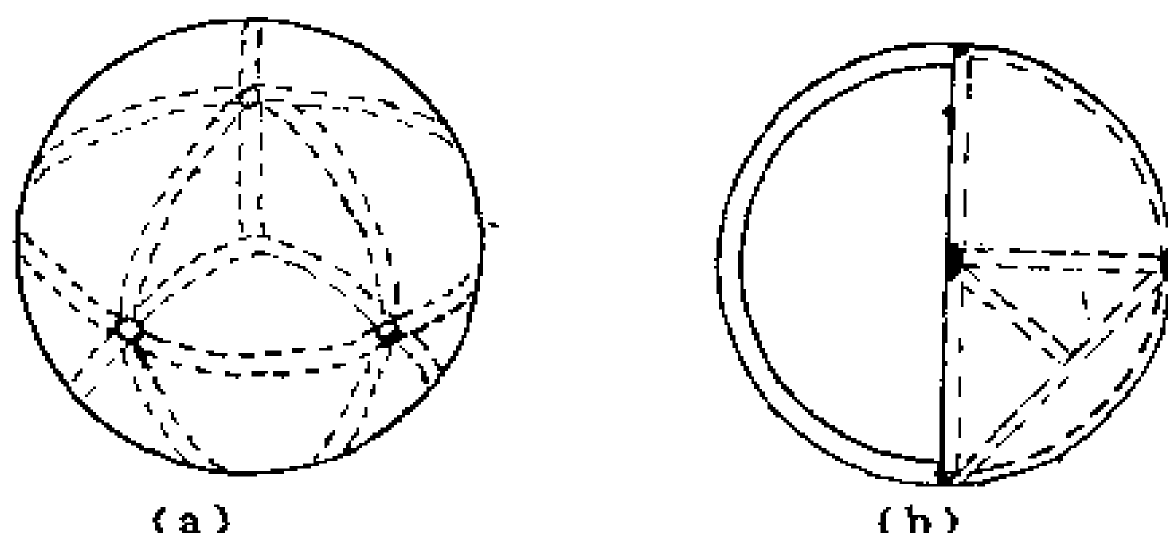
在一些陶器上具有等分圆周的特点，如河北磁县下潘汪新石器时代遗址出土陶器的口沿不仅是规则的圆形，而且底周外



1—20　下潘汪出土陶器口沿形状

缘有花牙子，牙距比较均匀①，明显地反映出等分圆周思想（图1—20）。

在四川②、湖北③④一带新石器时代遗址中先后发现不少空心陶球⑤，制作精致，非常规则（图1—21）。由实心球到



(a)　　　　(b)

1—21　大溪出土的空心陶球

空心球在几何认识上是一个很大进步。这些空心陶球的特点是：都有镂孔，孔与孔之间用实线或虚线连接，球壁厚度均匀，外面的连线都具有规律性。比如在桂花树出土的陶球中有一个画着六条经线和一条纬线，经线基本上构成三个大圆，交于两个镂孔上，经纬线的交点上也是镂孔。还有一个以一个镂孔为中心画出“米”字型的双虚线。毛家山出土的也有一个与此相似，每个上面有六个孔，三对，每对正好是一个直径的两个端点。大溪的陶球也与此类似，也是六个孔，只是外面的连

① 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第73—116页。

② 四川长江流域文物保护委员会文物考古队：《四川巫山大溪新石器时代遗址发掘记略》，《文物》，1961年第11期，第15—21页。

③ 纪南城文物考古发掘队：《江陵毛家山发掘记》，载《考古》，1977年第3期，第158—165页。

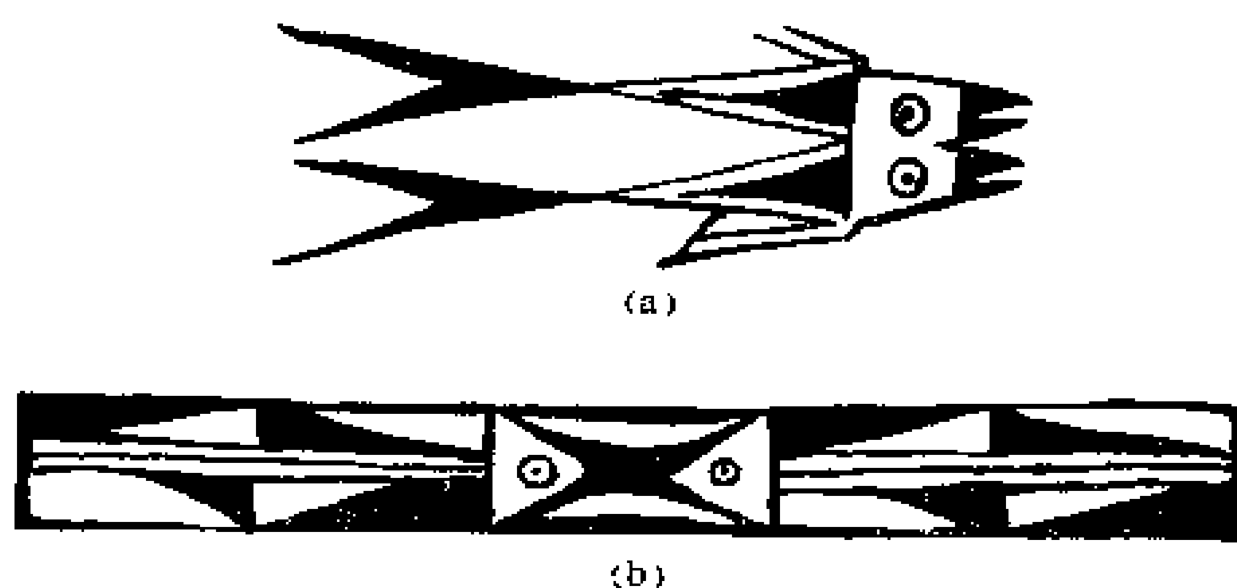
④ 湖北省荆州地区博物馆：《湖北松滋县桂花树新石器时代遗址》，载《考古》，1976年第3期，第187—196页。

⑤ 最近安徽也出土了一大批。

线稍有差别。很显然，三个直径是互相垂直的。

这些空心球说明早在五六千年以前，我们的祖先就已经有了不少有关球和球面几何的知识。

3．陶器花纹中的几何图形。新石器时代遗留下来的陶器很多。这些陶器上的花纹和图案，对研究古代几何学的起源非常有用（花纹和图案的做法有两种：一种是在陶器的表面上刻划；另一种是用不同的颜色描绘）。河姆渡的彩陶上有明显的平行线和不太规则的正方形。半坡出土的彩陶上提出了几何图形来源的一种途径：由某种自然物（如鱼）的形状逐渐演变成几何图案（图1—22）。有人作过这种演变的推测①，看来是



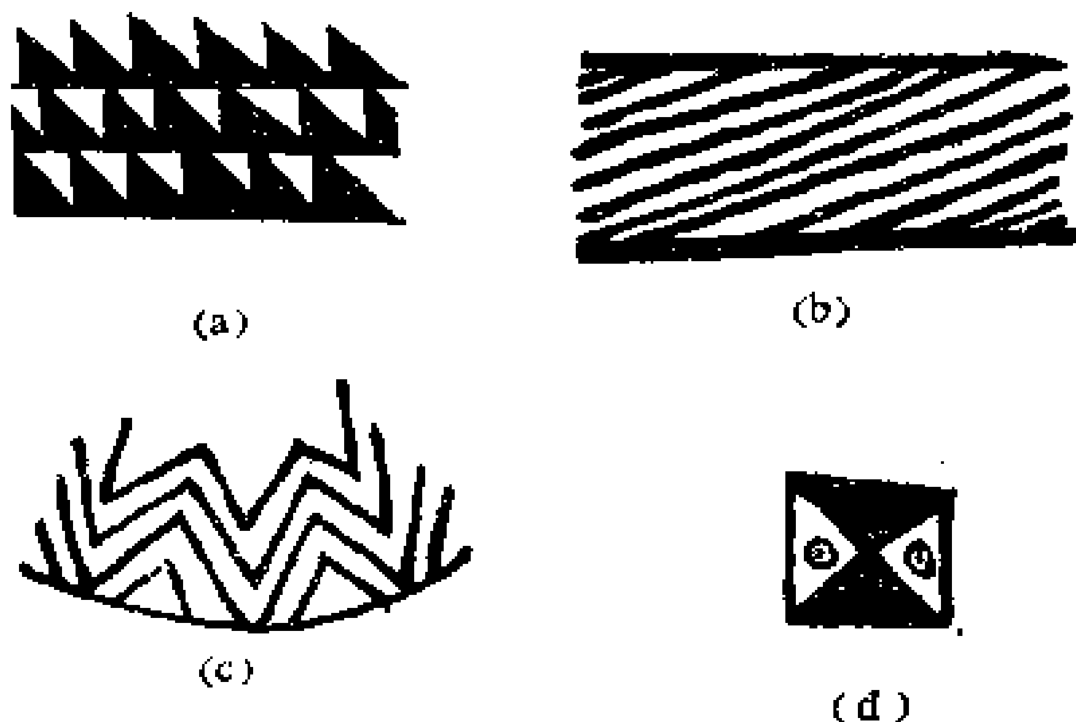
1—22　半坡出土陶器反映几何图形演变的图案

合乎实际的。即由鱼形演变成不规则的梭形或菱形、三角形等，再变成比较规则的几何形。而且可以从实物上较清楚地看到：有上下两条鱼，头朝一侧；还有的两头相对、沿着两个方向进行。

西安半坡出土的彩陶上的几何图案有平行线、折线、三角形、菱形、圆、长方形等等（图1—23）。三角形又可细分为

① 《西安半坡》，第181—185页。

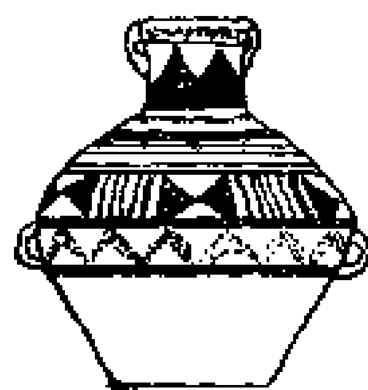
任意三角形、直角三角形、等腰三角形和等边三角形。这些事



1—23 半坡出土陶器上的几何图案

实说明，早在六千年以前，我们的祖先已经能够绘制初等平面几何中的大多数直线图形。虽然这些图形绘制得比较粗糙，但是画图需要一些简单的工具，因此推测半坡时代的人可能会使用直尺（不能用现代的观点理解原始社会的直尺，它可能是某种能起直尺作用的代用品，如很直的草棍等）。

从稍晚期的新石器时代遗址出土的陶器花纹来看，人们的几何知识有了发展。比如在下潘汪遗址出土的陶盆上有很多几何图案，圆弧形和其它曲线形图案有了显著的增加，盆口沿上的花纹表现出准确的等分圆周图形。①



1—24 张家台出土陶器几何图案

甘肃省景泰县张家台出土的新石器时

① 《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第75—116页。

代的彩陶罐上有很规则的平行线、三角形、圆弧等几何图案（图1—24）。①

第二节　早期数学知识的积累

大约距今四千年前，我国开始进入奴隶社会。由于奴隶制的建立，生产得到很大发展，奴隶和自由民创造了我国早期的科学文化，也推动了数学的发展。由夏、商开始到封建社会初期的秦代将近两千年的时间里，积累了丰富的数学知识。主要表现在以下几个方面。

数概念的发展与扩充

人们在从事生产或其它活动中，数目多次反映到人的头脑中来，再通过长期思考，进一步抓住它的特性，从感性认识上升到理性认识，从而形成了数的概念。

1．商甲骨文中的十进制记数系统。数的概念形成于新石器时代末期，完成于奴隶社会初期的商代。商代是我国奴隶制经济发展时期，科学、文化都达到了较高水平：当时已能大规模地炼铜；已经发明了车子；有了历法；农业生产技术也有了很大提高。特别是甲骨文和金文的出现标志着我国的文字从简单的象形逐渐发展到成熟的阶段。所有这些技术和文化成就对于

① 甘肃省博物馆：《甘肃景泰张家台新石器时代的墓葬》，载《考古》，1976年第3期，第180—186页。

数学的发展都起了推动作用。

在甲骨文中有许多数目字，其中最大的数目字已经达到“三万”。现举百以上的例子如下：

二百：“二百人王”

三百：“左右中人三百”

四百：“四百”

五百：“骰贞五百宰☐”

八百：“昏方征……八百”

九百：“乎……九百人”

一千：“丁未卜……王登千人”

五千：“五千”

八千：“☐人八千在䢵”

一万、三千：“登妇好三千、登旅万”

三万：“癸卯卜……其☐三万”

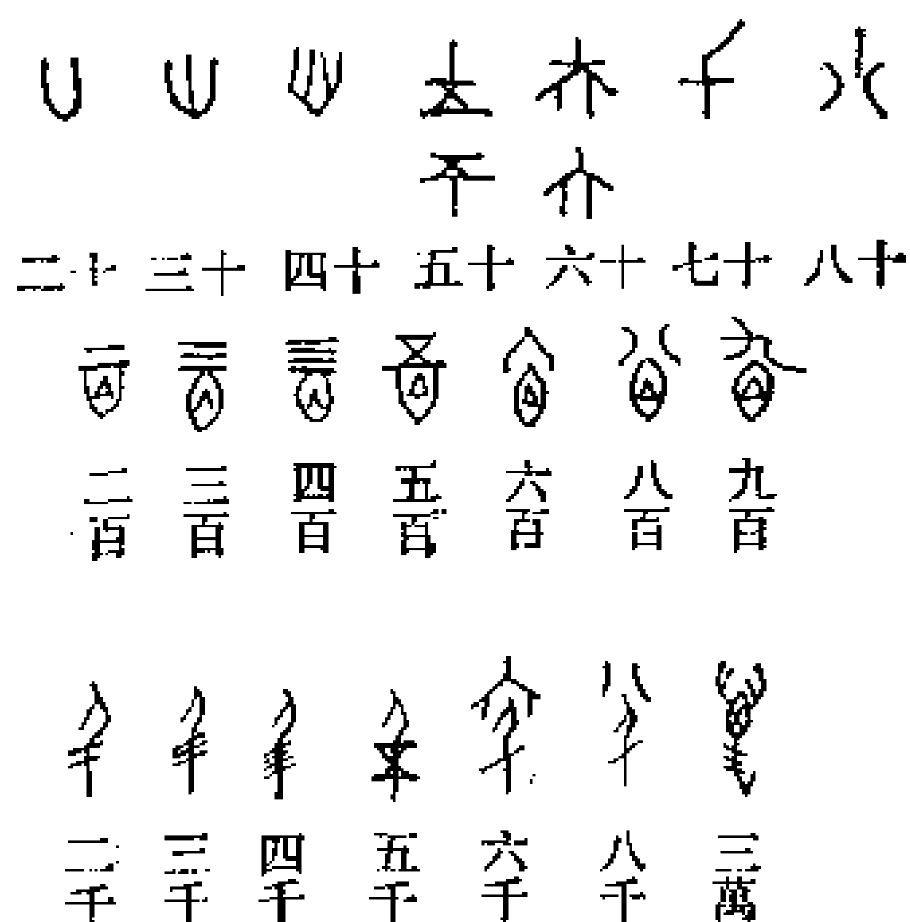
甲骨文的字形有些和现代文字不同，但是我们也可以清楚地看出：后来汉文中的数目字是从甲骨文演变来的。甲骨文中的数目是十进位的，是以前不完善十进制的完善化和必然的发展。从1到10的每个数都有文字表示，还有“百”、“千”、“万”等也都有相当的文字符号。现在把这十三个文字列举如下：

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 萬

1—25

关于十、百、千、万的倍数大都采取合书的方式书写，如

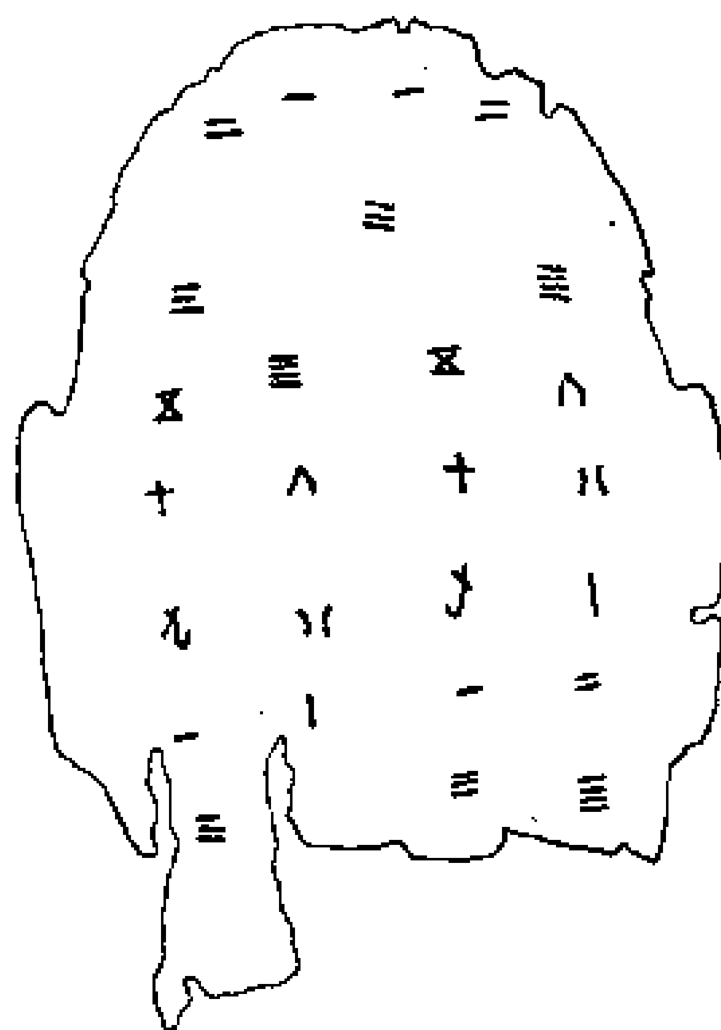
下：



1—26

但是也有不合书的，例如有一片甲骨上把“三十”写作“☰｜”，而不是“𠁩”或“卅”，等等。一些数目字连书，是采取分地位合书的办法，如“二千六百五十六人”，便写作“𠦃𦉜文∧人”。

在一片甲骨上有由1到10的全部十个自然数（图1—27），没有和实物连在一起，说明商代已经有了抽象的自然数概



1—27　甲骨上的数目字

念。

在商代的记数法中还有一种六十循环的办法，这就是主要用在历法上的所谓“天干地支”。天干有十个，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；地支有十二个，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。从干、支的头一个字甲、子开始依次各取一个，配成甲子、乙丑、丙寅、……干或支完了接着再取，直到癸亥，共取六十次。以后又是甲子等出现了循环。在一片甲骨上就有一个完整的甲子表，至于零散的甲子纪年纪日的甲骨就更多了。这种干支纪年法后来一直沿用，现在农历还在使用。

甲骨文中数目字的写法是从新石器时代的刻划符号发展而来的。数学的“数”字是从结绳的形象而来，甲骨文中“数”字写做“𢿌”，从娄从系，就是将绳子打上结，束成小把以计算。

商代至少应有加法、减法和乘法运算，只是没有明确的记载。实际上，甲骨文只能记录结果，而不能记载算法和运算过程。但是通过一些实例可看出其算法。在一片甲骨上，记载了如下的数字：

五十犬，五十羊，五十豚①，
三十犬，三十羊，三十豚，
二十犬，二十羊，二十豚，
十五犬，十五羊，十五豚。②

全是5的倍数，而前三排又都是10的倍数。

① 豚音屯 tún，小猪。
② 《殷墟书契前编》。

周以后有了运算的记载，例如在周代的一件铜器上有“东宫廼曰：偿曶[①]禾十秭[②]，遗十秭为廿秭。（如）来岁弗偿则倍卌秭[③]。”秭是后来的大数名称，指万亿，这段文字是说偿还奴隶主曶庄稼（禾）十秭，同时要送给他十秭，共为二十秭。如果第二年不偿还，就要增加一倍为四十秭。实际上这已包括$10+10=20$和$20\times2=40$两种算法——加和乘。

战国时，李悝[④]倡“尽地力之教”，他算了一笔账：“今一夫挟五口，治田百亩，岁收亩一石半，为粟百五十石($1.5\times100=150$)，除十一之税十五石$\left(\frac{150}{10}=15\right)$，余百三十五石（$150-15=135$）。食：人月一石半，五人终岁为粟九十石（$1.5\times12\times5=90$），余有四十五石（$135-90=45$），石三十〔钱〕，为钱千三百五十（$45\times30=1350$），除社闾尝新春秋之祠用钱三百，余千五十（$1350-300=1050$）。衣：五人终岁用千五百，不足四百五十($1050-1500=-450$)。……”[⑤]这里已讲到了减法、乘法和除法，特别是最后的一次计算出现了不足，用现代的观点来看就是有了负数。李悝未必懂得这个意义，但是却为负数概念的出现提供了来源。

由于重复计算的需要，我国古代早已出现了乘法口诀，但是直到春秋战国时代的文献中才有了不完全的记载；而且次序与现代不同，由“九九八十一”开始，因此又称这种口诀为“九九”。

---

① 曶音虎hū，在这里是人名。
② 秭音子zǐ。
③ 郭沫若：《奴隶制时代》卷首插图及释文。
④ 悝音魁kuī。
⑤ 《汉书·食货志》。

2．分数的广泛应用。至迟在春秋战国时代我国已经有了分数概念。在春秋战国（特别是战国）的著作中记载了许多分数及其应用的例子。当时社会上思想活跃，生产活动的范围有所扩大，技术水平也有提高，实践中提出了许多新的数学问题。比如不够一个整体的物体就不能用自然数表示其数量，而必须创造新数。在《墨子》、《管子》和《商君书》等书中所记载的分数大都是由于分配而引起的。例如《墨子》讲到食盐的分配时就有“二升少半”和“一升大半”的记载。其中“少半”和“大半”即$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$，还有“半”为$\frac{1}{2}$，都是当时分数上专用的名词。《管子》在讲土地种植的分配时有“十分之二”、“十分之四”、“十分之五”、“十分之六”、“十分之七”等分数。在另一处也讲到了“五升少半”、“三升少半”。在《商君书》中有这样的记载：“地方百里者，山陵处什一，薮泽处什一，谿谷流水处什一，都邑蹊道处什一，恶田处什二，良田处什四”，就是说一百平方里的地面上各种地貌所占的比例，前四种都是$\frac{1}{10}$，后两种各为$\frac{2}{10}$和$\frac{4}{10}$，加起来为$\frac{10}{10}(=1)$。战国时代在制造量器“商鞅量”时也用到了分数，规定“积十六尊五分尊一为升”。“尊”就是寸，这句话是说1升＝$16\frac{1}{5}$（立方）寸。

在《考工记》中记载了由于制造各种器具和器具规格的需要而大量使用了分数，特别是有了分数运算。例如“六分其轮崇，以其一为牙围，叁分其牙围漆其二”，这里说的是1牙围$=\frac{1}{6}$轮崇；一牙围的$\frac{2}{3}$要上漆。《考工记》中还记载了一种叫做殳①的竹制兵器的规格，“凡为殳五分其长以其一为之被而

① 殳音殊shū。

围之，叁分其围去一以为晋围，五分其晋围以其一为首围”。意思是说 1 围 $=\frac{1}{5}$ 长，1 晋围 $=1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，1 首围 $=\frac{1}{5}$ 晋围。

这些事实有力地说明了我国早在公元前四、五世纪就已建立了分数概念并有了广泛的应用。

春秋战国时由于制造衡器和乐器的需要，也用到了其它一些数学知识。例如战国墓葬中出土的天平砝码的重量以 1、2、4、8、……递增，相当于以等比数列 2^0、2^1、2^2、2^3、…递增。这种数列的出现，显然是当时以十六两为一斤的规定而来的。在乐律研究中有“三分损益法”，用到分数运算。在《管子》一书中有“先主一，而四之三开，以合九九”的记载，相当于 $1\times3^4=9\times9=81$，这已有了指数的初步观念。

1978年，湖北随县曾侯乙墓出土的磬匣上都用汉字标记了号码。值得注意的是在标记号码中数字“亖”改为“㣇”，这是汉字由“　”到“四”的过渡形式。其余字形大体和甲骨文差不多。但是非十的倍数的写法有了变化，如 41 写作丗，等等。

工程中的测绘与几何问题

和数的概念一样，形的概念在我国奴隶社会也有新的发展。为适应各种社会活动（特别是生产实践活动）的需要而大大丰富了几何知识的内容。在夏商时代已开始兴修水利工程，传说夏禹曾领导治水，甲骨文中有了“正河”的记载。“正河”就是兴修水利。当时城堡、房屋建筑的规模也很大，所有

这些工程都要用到测绘和几何学知识。

1．测量与绘图工具的起源。土木工程和工具的制造等都需要测量，而测量又需要一定的几何知识和必要的工具。例如在河南偃师二里头发掘出来的早商时代宫殿遗址，规模宏伟，光是台基面积就约有一万平方米，墙基很直，柱孔排列整齐，分布均匀。① 这样的大型建筑，必须通过测量才能办到。

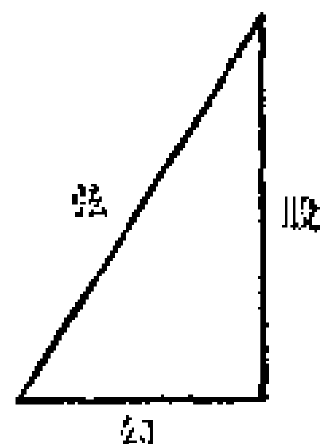
《史记・夏本纪》在讲到夏代的一次治水工程时说：“陆行乘车，水行乘舟，泥行乘橇②，山行乘檋③，左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道。”所谓“准绳”，是指水准测量或直线测量，“规矩”则是两件绘图工具，就是画圆的规和画直线及直角的矩。商代的甲骨文中已经有“规矩”二字，规写作“奴”，矩写作“匚”④，后来的矩是拐尺形。既然商代已经有了“规”、“矩”二字的象形文字，那么规矩的发明可能还要早得多。在汉代的许多画面上常见有“伏羲手执规，女娲⑤手执矩”的图象，规是两脚状，和现在的圆规相似，矩是一直角拐尺形。

公元前二世纪成书的《周髀⑥算经》卷上记载：“……故折矩以为句⑦广三，股脩四，径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘，得三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所由生也。”（图1—28）这就是说

① 中国科学院考古研究所二里头工作队，《河南偃师二里头早商宫殿遗址发掘简报》，载《考古》，1974年第4期，第234—248页。
② 橇音跷qiāo。
③ 檋音局jú。
④ 李俨，《中国古代数学史料》，1954，中国科学图书仪器公司，第8页。
⑤ 娲音蛙wā。
⑥ 髀音毕bǐ。
⑦ 句音gōu，与勾同。

在禹治天下时有了"勾三股四弦五"这个勾股定理的特例。

商代已普遍使用车子，仅在河南安阳殷墟就几次发现车子的遗迹①。制造车子需要用到几何知识。轮是圆的，而辐由毂向外射出把圆周角等分，也把圆周形的轮等分。1972年挖掘出来的车轮有22根圆柱形的辐，排列整齐。车的轮牙（辋）一般是由几块弧形构件合成，这就产生了用几段圆弧合并成圆的概念。要做到这一点，事先必须作精细的测绘和必要的计算。但是显然应当使用测绘工具，否则车轮是做不成的。



1—28 勾股形

2．几何测绘在春秋战国时代的发展。西周以后的春秋战国时代由于战争和生产的需要，各地修建了不少堤防和水利工程。为了使各项工程合乎需要，必须进行测量和计算。公元前548年，楚国在蔿②地兴修水利工程前作了各种测量，"蔿掩书土田，度山林，鸠薮泽，辨京陵，表淳卤，数疆潦，规偃猪，町原防，牧隰皋，井衍沃，量入修赋。"③公元510年，晋国率各诸侯国为周王筑城，动工之前，"士弥牟营成周：计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迩，量事期，计徒庸，虑材用，书糇粮，以令役于诸侯，属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命。"④这些记载说明，早在两千四、五百年前，水利工程中要进行距离、高低、

---

① 中国科学院考古研究所安阳工作队：《安阳新发现的车马坑》，载《考古》，1974年第4期，第24—28页。

② 蔿音委wěi。

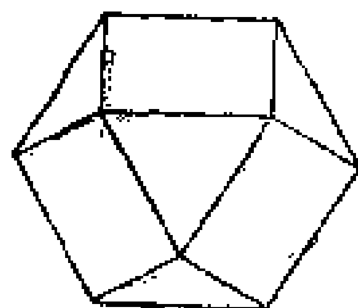
③ 《左传》襄公二十五年。

④ 《左传》昭公三十二年。

厚薄、土方等测量，同时还包括工程期限、劳动力多少和分配、所需粮食、材料等方面的计算。很显然，在这类工程中会遇到大量的几何问题，必须运用几何知识才能解决。如计算土方实际上就是体积计算。最简单的立体是立方体，稍复杂一点的是正四棱台，都应当有计算法则。城墙的修筑，同样需要几何知识，《墨子》中有关于城墙、城门、堞口、城楼等一系列的计算问题①，都与立体几何有关系。

春秋时期，在一些经济发达的地区已经有了封建生产关系的萌芽。公元前594年鲁国（今山东南部）开始实行"初税亩"制度，不论公私田地要按亩纳税。这就要求人们去研究面积的计算问题。虽然在当时的书籍上还没有找到有关面积计算的记载，但是估计当时对于正方形、长方形、三角形、梯形、圆等的面积计算法则已相继产生了。

在春秋战国之际的遗物中，有各种形状的磨制品，其中最引人注意的是1971年在山东临淄郎家庄出土的约公元前500—400年的殉人墓中水晶珠②（图1—29)。这种水晶珠呈简单的半正多面体形状，通过观察，可知其磨制过程：先把水晶块磨成正六面体，再磨去八个角（有一定要求），便成为一种半正多面体。它的表面由六个相等的正方形和八个相等的正三角形构成，并且所有的二面角都相等。在同一殉人墓中出土的一件漆器上画有很规则的同

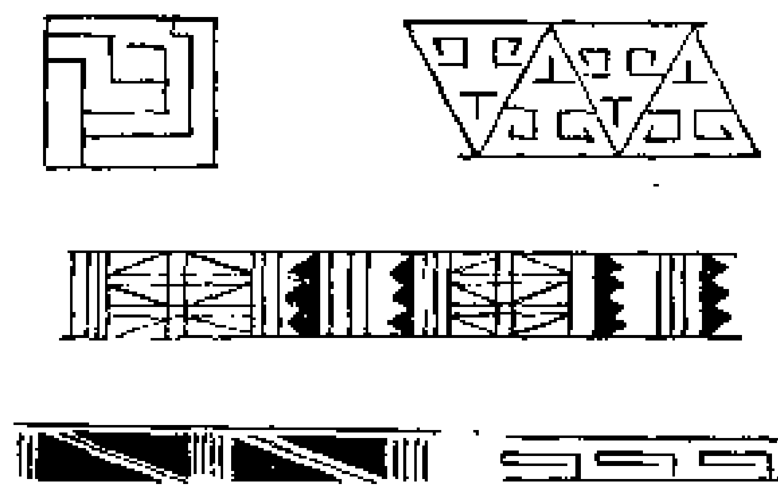


1—29　半正多面体水晶珠

① 《墨子》卷四十。

② 山东省博物馆：《临淄郎家庄一号东周殉人墓》，载《考古学报》，1977年第1期。

心圆、正方形、平行线、三角形、平行四边形、菱形、长方形等各种几何图形（图1—30）。



1—30 郎家庄出土漆器的几何图案

战国时期已经有了很好的技术平面图，例如在一些漆器上有船只、兵器、建筑等图形，其画法符合正投影原理。在河北省出土的战国时中山国墓中的一块铜片上有一幅建筑平面图，表现出很高的制图技巧和几何水平。

当时，在制造各种工具、器械、乐器过程中，常常会遇到需要把两个棒形物曲折相接，或者是将金属板、木板作成多边形，这就要用到角的概念。在《考工记》一书中有不少这方面的记载。这本书对于角和几种特殊角都有专门名称，把非直角的角叫做“倨句①”，“倨”是钝角，“句”是锐角。直角叫做“倨句中矩”或简称“一矩”，例如“磬氏为磬，倨句一矩有半”。“磬”是古代的一种石制乐器（图1—31），常把大小不等的几个磬按大小次序为一组吊起来敲打发声。“磬氏”是指制造石磬的工匠。“倨句一矩有半”是指石磬背部的折角的规格，其大小是一个直角（矩）再加



1—31 古磬的线图

① 倨句音具勾jù gōu。

上半个直角，相当于$90°+\frac{1}{2}\times 90°=135°$。在同一书中还有关于车辆规格的记载，包括一些构件角度大小的规定，并且把不同角度的构件取了专门名称，即“车人之事：半矩谓之宣，一宣有半谓之欘①，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”角度的大小相当于：

宣为$\frac{1}{2}\times 90°=45°$

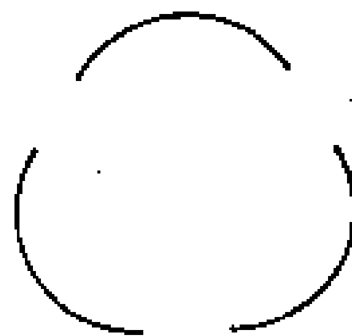
欘为$45°+\frac{1}{2}\times 45°=67°30'$

柯为$67°30'+\frac{1}{2}\times 67°30'=101°15'$

磬折为$101°15'+\frac{1}{2}\times 101°15'=151°52'.5$

“磬折”就是石磬背部的标准折角。《管子·弟子职篇》中也有“俯仰磬折”和“倨句如矩”这样的话。

《考工记》还记有“筑氏为削：合六而成规；天子之弓，合九而成规；诸侯之弓，合七而成规；大夫之弓，合五而成规；士之弓，合三而成规。”是说制造弓的规格，每张弓都成一圆弧形状，使几张弓合在一起构成圆周（图1—32）。但是要根据当时的社会等级的要求去制弓。一般人用的弓六张合在一起为一圆周，天子用的弓九张合在一起为一圆周，等等。这里已经包含着明确的等分圆周概念。如果把弓上的弦联在一起考虑，就构成了圆内接正六边形、正九边形、正七边形、正五边形、正三角形。



1—32　“合三而成规”图

在春秋战国时代的文献上常常把测量和绘图记载在一起。

① 欘音竹zhú。

实际上，两者之间有密切的关系。当时测量的内容已经比较齐全，包括直线测量、水准测量、垂直测量等，分别叫做"绳墨"（或"准绳"），"水"和"悬"等。"绳墨"就是打墨线以取直，"水"是以水平面为标准测量坡度和高程，"悬"是用悬垂的线以定垂直。《考工记》中说："匠人建国，水地以县（悬）"，这就是垂直和水平的关系：悬垂的线和水平面互相垂直。还有"衡者中水"，也说的是以"水"测定平衡。匠人在进行建筑之前要通过"悬"、"水"进行测量。当时作为诸侯国的有名工匠，必须达到"可规可萬①可县可水可量可权"，就是要掌握画圆、画直、垂直测量、水平测量、容积测量（"量"）和重量测量（"权"）六种技术才能称之为"国工"。这些测绘技术都与几何有直接关系。在《墨子》等书上也有"直以绳，正以县"等记载，这两句话是指用"绳"取直，用"县"（同悬）取正。

以上事实说明，到了春秋战国时代，由于社会生产的发展以及兼并战争的需要，已经积累了较为丰富的几何知识。

组合数学②和运筹③思想的萌芽

1．《易经》中的组合数学思想。一些现代形成独立分支

① 萬即矩。

② 组合数学一般研究有限个元素在某些事先指定的约束条件下如何排成一些集合，如幻方（纵横图）、排列组合等都属于组合数学。

③ 运筹学是本世纪四十年代形成的一门数学学科，主要研究经济活动和军事活动中通过数学的分析和计算作出综合的合理安排，以达到较有效地使用人力物力的目的。它又包括对策论（博弈论）、规划论、排队论和质量控制等主要分支。

的组合数学和运筹学，其思想萌芽可以在我国遥远的古代找到踪迹。这些早期的数学思想萌芽对现代科学的发展产生过一定的影响，被国际上所重视。流传至今最古的典籍之一——《易经》中已有组合数学思想的萌芽。这是一部讲卜筮①的书，通过阴阳卦爻②，预言吉凶，本来是宣扬迷信思想，但其中包含一些数学内容。

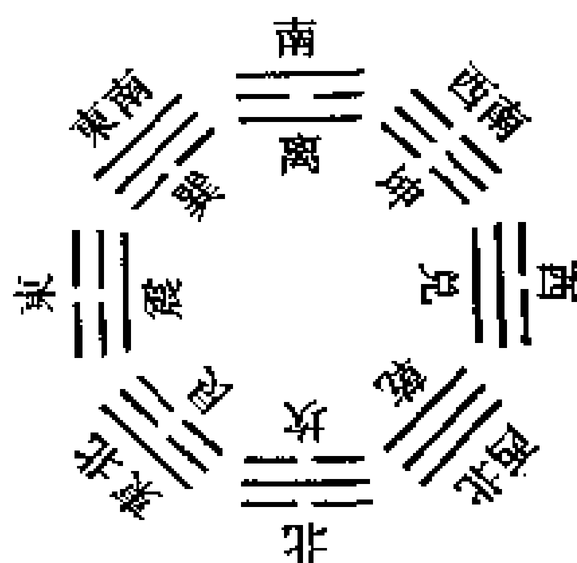
卦爻用两种符号表示："——"是阳爻，"－－"是阴爻。把两爻按照不同的次序排列变成"四象"、"八卦"、"六十四卦"（图1—33）。八卦又配上"乾"、"坎"、"艮"、"震"、"巽"、"离"、"坤"、"兑"八个字，代表八个方向（图1—34）。四象、八卦、六十四卦等的排列方法相当于数学中的重复排列。假如有n种相异物件，每次取r个，按不同形式排列，共有n^r种排列法，即

四象

八卦

1—33　四象与八卦

$$n^r=\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{r\text{个}}$$



1—34　八卦的排列

阴爻和阳爻是两种物件，每次取两个，计算得 $2^2=4$，就是

① 筮音是 shì，古代占卜用的草或竹棍。
② 爻音姚yáo。

四象；每次取三个，即有：$2^3=8$，就是八卦；每次取六个，即有：$2^6=64$，就是六十四卦。还可以有另外一种算法，把——和－－各与——、－－排列一次，就由两仪得到四象；再把——和－－与四象各配一次，就由四象得到八卦；把八卦的每一卦都和八卦相配一次，就得到“八八六十四卦”。古代是按后一种方法计算的，但和前一种方法一样（当时人们不一定知道算法的原理，然而实际上是用到了）。卦爻还反映了二进制思想。如果把——和－－用记号1和0代替，八卦就可分别表示为000（坤）、001（艮）、010（坎）、011（巽）、100(震)、101（离）、110（兑）、111（乾）,这就是现代二进制记法。

八卦传入欧洲后，德国数学家莱布尼兹（Leibniz，公元1646—1716年）很感兴趣，并作了研究，从而建立了二进制。他对于《易经》中的八卦评价很高，写道：“易图是流传于宇宙间科学中之最古的纪念物。”由于《易经》中有“古包羲氏始作八卦”（包羲即伏羲）这样的话，莱布尼兹建立二进制自认为是受了伏羲的启发，“我之不可思议之新发现……就是对于理解三千余年前中国最初的君王且为唯一的哲学者伏羲之古代文字的秘密的发现，对于中国人实在是深可庆幸的事情，应该允许我们入中国吧！因为这包藏着不可思议的神秘（Mystie Chbalistigue）的中国人，已经丧失了他的二千年前传说的文字秘密，可是现在居然发现了从来未试用的计算方法。”①二进制是电子计算机所采用的主要进位制，近些年有人曾撰文论述八卦和电子计算机的关系。

① 〔日〕五来欣造著，刘百闵、刘燕谷译：《儒教对于德国政治思想的影响》（转引自丁超五《科学的易》）。

2．春秋战国时期运用筹划的事例。运筹学的早期萌芽常常以运用筹划，进行斗智的形式出现。当时，由于军事、游戏和其它方面活动的需要，运筹的思想有了发展。《孙子兵法》、《孙膑兵法》、《管子》等书中都有对策思想。战争和某种游戏都带有对策性，古代常用"运筹帷幄①"这样的话说明运用筹划，以克敌制胜。春秋末期的著名军事家孙武就是一位善于运用筹划的人，他总结了许多战争的规律，著有《孙子兵法》一书，论述有关战争胜负的各种条件。例如书中讲了在作战中以少胜多，以弱敌强要以"我专为一，敌分为十，是以十攻其一也，则我众而敌寡"的思想为指导。这里说的是集中自己的兵力"我专为一"，分散敌人的兵力（"敌分为十"），用集中的兵力去攻击分散之敌（"以十攻其一"）。后来战国时期著名军事家孙膑也特别注意用以少胜多的思想指导作战②。

下面举例说明当时运筹学思想，特别是对策论思想的初步运用。

"孙膑斗马术"问题。齐威王要和田忌赛马，每人各有上、中、下马一匹，而田忌的三匹马都不如齐威王的三匹马。竞赛分三场进行，如果按同等的马竞赛三场，田忌肯定是场场皆输。这时孙膑给田忌出了个主意：用下等马对齐威王的上等马，用上等马对齐威王的中等马，用中等马对齐威王的下等马。田忌采纳了这个建议，竞赛的结果田忌取得了一负两胜的成绩③。这个事例的基本思想是用一场的失败而换取全盘的胜

---

① 帷幄音维握wéi wò。
② 詹立波：《〈孙膑兵法〉残简介绍》，载《文物》，1974年第3期，第40—46页。
③ 《史记》卷八、五十五、六十五、九十一。

利，是对策论中争取总体最优的范例。

在当时的游戏中，运筹思想也是明显的。如六博戏就是要讲对策，结局主要是由双方对策的优劣而决定胜负。六博游戏在春秋战国时期已很普遍，由一个方木盘和棋子、箸子做用具进行。在湖北云梦战国末期墓葬中出土了一套六博棋，有骨制棋子六个，均为长方体，一个较大的涂红色，其余的涂黑色，还有长为19.5厘米的竹箸六根。①

"博弈论"或"对策论"之称，就是根据有利害冲突的双方在竞争活动中研究制胜的最优策略而来。不过，早期的运筹思想还没有能够用明显的数量关系进行描述。

理论研究的尝试与对数学起源问题的认识

数学知识通过长期积累，内容日益丰富，人们必然要进行理论研究和提出看法。这两种情况在春秋战国时代都有了明显的表现。

1. 墨家学派及其它学派的理论研究。《墨子》等书中所讨论的几何概念就是数学理论研究在我国的最初尝试。《墨子》一书是墨家学派的著作，它包括丰富的科学知识。在《墨经》②部分对光学、力学、逻辑学和几何学等方面的问题都试图从理论上进行探讨。墨家学派在某些方面和稍晚的希腊学者亚里士多德（Aristotle，公元前384—322年）很相似。如果说

① 湖北孝感地区第二期亦工亦农文物考古训练班：《湖北云梦睡虎地十一座秦墓发掘简报》，载《文物》1976年第9期，第51—61页。

② 《墨子》一书中包括"经上"、"经说上"、"经下"和"经说下"四篇，合称《墨经》。

亚里士多德是西方形式逻辑系统的创造者①，那么墨家学派则是东方形式逻辑的鼻祖。亚里士多德曾尝试把形式逻辑用于数学（主要是几何），墨家学派也是这样。

《墨经》中载有墨家给一些几何概念所下的定义，如：

"平，同高也"。这是"平"的定义，可能是指平行线。

"直，参也"。这是直线的定义，"参"就是"三"，是说三个点共线的问题。

"同长，以正相尽也"。这是对两线段相等的定义，"正相尽"是说正好重合的意思。

"中，同长也"。这是对线段中点的定义。"中"即线段的中点，"同长"是说中点到线段两个端点的距离相等。

"圜，一中同长也"。"圜"就是圆，这是关于圆的定义。"一中"是说有一个中心，"一中同长"是说到一个中心有相等距离的点所构成的图形。

"方，柱隅四匝也"。这是关于正方形或矩形的定义。

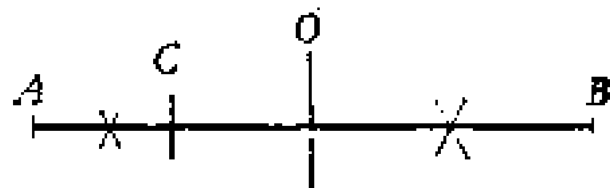
此外《墨经》还有关于点、线、面、体的说明，以及它们之间的关系。书中把点叫"端"，线（或线段）叫"尺"，面叫"区"，体叫"厚"。有一条记载很重要，即"穷，或有前不容尺也"，意思是：用一个线段去量另一个线段总能量到不够量的时候。

所有这些都是试图运用形式逻辑方法定义几何概念。尽管有些说法不太清楚，也没有形成逻辑系统，仍然是非常宝贵的。

---

① I.M.Bocheński, Ancient Formal Logic, 1963, Amsterdam, pp.19—71。

墨家学派还讨论过分割物体的问题。《墨经》中说把一个物体平分为两半，再将其中一半分为两半，如此继续分割下去，总能分割到一个不可分的"端"。这个"端"在那里呢？把分割下的前一半保留，而弃去后一半



1—35

（图1—35中OB），再弃去前一半的前一半(图1—35中AC)，一直这样分割和继续舍弃，最后就得到一个不可再分的"端"。这个"端"和古希腊哲学家德谟克里特（Democritus，约公元前460—357年）的"原子"很相似。但是墨家学派承认有无穷大存在，《墨经》上写道："莫不容尺，无穷也"，就是说有这样一种量：用任意长的线段去量它，它都能容纳得下，这显然是一种"无穷大"思想。

《庄子》一书记载说："至大无外，至小无内"，前半句是无穷大的意思，后半句是无穷小的意思。同书《天下篇》还说："一尺之棰① 日取其半，万世不竭。"就是把一个一尺长的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，如此下去，永远也不会取完。第一天所取为$1/2$，第二天所取为$1/2^2$，第n天所取为$1/2^n$，不论n为多大的数，$1/2^n$总不为零。这就是说，相当于命题

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\to 0$$

就是永远也取不完。

2．对数的起源问题的认识。春秋战国时代人们对数的起源问题也提出了一些看法，有些看法对后来的影响很大。

---

① 棰音垂chui，木棒。

数和物质的关系是数学中的一个很重要的哲学问题，人们必须作出回答。最先回答这个问题的是《老子》一书，该书下编第四十二章写道："道生一，一生二，二生三，三生万物。"这里把"一"看成是万物的源泉，有了"一"就可以有万物，而"一"又是从一种非物质的"道"生成的。这种说法颠倒了数和物质的关系。本来是物质在前，数在后，但是这里却把物质说成是数的派生物。古代希腊的毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前六世纪人）学派提倡所谓数为万物之源说，把数看做万物的本源，和《老子》中所说的"三生万物"本质上是一致的。

在战国时期，还曾流行过一种观点，把一切事物的起源全部归功于某些个别人物，甚至是神话传说人物。比如说"隶首造数"，"大挠作甲子"，"倕为规矩"等等都是。本书第一节所讲述的事实充分说明，数学的起源不是个别人物创造的，而是人们长期实践积累的结果。如果把"隶首"、"大挠"、"倕"等看作是群众的代名词，那是可以接受的。

第三节　秦、西汉时期的数学与筹算

公元前221年，秦统一全国，建立了中央集权。继之而起的汉王朝长期统一、较稳定的政治局面为生产的迅速发展创造了条件。由秦到西汉末的二百多年间，我国的农业、手工业和其它事业都有了很大的发展，科学技术也呈现出一派繁荣的景象。数学在各方面得到了广泛的应用，在实际应用中又有了新的积累和发展。

汉简中的数学知识

在纸张出世以前，除帛① 以外，竹是书写的主要材料，即把文字刻或写在竹片上，再用绳穿在一起而成册。秦汉时期的竹简已在许多地方发现，大都为汉简，包括居延汉简②、武威汉简③，以及近年来出土的银雀山汉简④、云梦睡虎地秦简⑤和江陵汉简牍⑥。其中数学内容最多的是居延汉简，在全部一万多枚中，有不少写着具体的年月日。大部分都是西汉的，最晚的到东汉初（公元一世纪初）。在这部分汉简中，数学的内容最为丰富。

1. 加减法的应用实例。汉简中有关算术四则运算方面的问题很多，而且都是和当时的记帐、分配、统计等有关，这里先举些有关加减的例子。

在一片竹简上写着：

"董次入谷六十六石，直（值）钱二千三百一十，入钱二千一百八十七，凡四千四百九十七。"⑦就是 $2310+2187=4497$ 钱。这是四位数的加法。

还有一条记载当时一个人的主要财产（包括奴婢）的统

---

① 帛音薄 bó，丝织品的总称。在发明造纸以前，有钱人常在帛上写字或画图。
② 是指在甘肃省居延海附近发现的汉代竹简。
③ 是指在甘肃省武威县境内发现的汉代竹简。
④ 是指在山东省临沂县银雀山发现的汉代竹简。
⑤ 是指在湖北省云梦县睡虎地发现的秦代竹简。
⑥ 是指在湖北省江陵县凤凰山发现的汉代简牍。
⑦ 中国科学院考古研究所：《居延汉简甲编》，1959，科学出版社，第66页，第一五七四简。

计："小奴二人直三万，用马五匹直三万，宅一区万，大婢一人二万，牛车二辆直四千，田五顷五万，轺车一乘直万，服牛二六千，凡赀直十五万。"①这也是加法，一共有八项。用现在的写法即：

$$30000+20000+10000+20000+4000+50000+$$
$$+10000+6000=150000$$

还有一条记载给戍卒240人粮食的问题，"出谷四百六十四石"，有三种粮食，即"廿九石粟，二百九十石糜，百卌五石麦"，②也就是464石=29石+290石+145石。

分数的加法也不少。例如有一条记载可能是说一个戍卒的家属用粮数，"妻大女止年廿一用谷二石一斗六升大，弟使男陵年十二用谷二石一斗六升大，凡用谷四石三斗三升少"③，其中"大"指大半，即$\frac{2}{3}$，"小"指小半，即$\frac{1}{3}$，其算法是

$$216\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=433\frac{1}{3}$$

又有一条与此类似的记载，"妻大女止氏年廿六用谷二石一斗六升大，子使女捐之年八用谷一石六斗六升大，子使男并年十用谷二石一斗六升大，凡用谷六石。"④即

$$216\frac{2}{3}+166\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=600（升）。$$

加法与减法出现在一条记载上的也有。一个人从另一个人那里"得粟三石直三百六十，粟三石直三百六十，它钱三百五

① 劳榦：《居延汉简考释释文之部》卷三，1949，商务印书馆，（一四六）三七·三五。
② 同前页⑦，第106页，（附八）简。
③ 同前页⑦，第11页，（二〇二）简。
④ 同前页⑦，（二〇三）简。

十，凡得千一百，少二千四百三□。”① 前面四句讲的是加法运算360＋360＋350＝1070。这里因文字有误，算得结果少30。重要的是三项加起来不能抵偿债务，尚“少二千 四 百 三 □”（最后一字不清，可能是十），这是在一个负数上加上1100得到负数2430，其算法可能是用的减法。

例如“万岁候长”有“负四筭，得七筭，相除得三筭”②，“相除”就是相减，“负”是欠人家的，算法是 $7-4=3$，实际应是 $7+(-4)=3$。

还有一“甲渠候鄣”有一批负算：“大黄力十石弩一右深强一分负一算，坞上望火头三不见所望负三算，八石具弩右弛失负一算，坞上望火头二不见所望负二算，六石具弩一空上蜚负一算，□扣弦一脱负二算，六石具弩一衣不上负一算，凡负十一算。”③ 这里的算法是加法，即“负一算＋负三算＋负一算＋负二算＋负一算＋负二算＋负一算＝负十一算”。按我们现在的算式应为“$(-1)+(-3)+(-1)+(-2)+(-1)+(-2)+(-1)=-11$”。

这几个例子对于说明负数在我国的起源有重要意义。“负”是亏负、亏欠的意思，有深刻的社会含义，最初不会有我们现在的这种认识，但它借用了社会上经济亏欠的意思。

2．乘法与容积计算实例。在汉简中有关乘法和容积计算的实例很多，例如“斗食吏三，一月奉用钱二千七百，一岁奉用钱三万二千四百。”④ 即 $2700\times12=32400$。又如。“幽光

① 同前页④，第10页（一八八）简。
② 《居延汉简考释释文之部》，卷三，（二三五）二〇六·四。
③ 《居延汉简甲编》，第17页（三六二）简。
④ 《居延汉简甲编》，第3页（二十）简。

籴粟四千石，请告入县官贵市平贾，石六钱，得利二万四千”①，就是4000×6＝24000。有些汉代的木牍上也有大量的乘法记录，湖北江陵凤凰山十号西汉墓出土的木牍中记有“二月百一十二筭，筭卅五钱，三千九百廿正”②，即112×35＝3920。“四月百九筭，筭九钱，九百八十一正”③，即109×9＝981。同墓出土的竹简上有加法计算，如“邓得二，作甲二，宋则二，野人四，凡十筭”④，就是2＋2＋2＋4＝10。例子很多，不再列举。

在汉代，量器有大小两种，如大石小石，它们之间有固定的比例，这在竹简中也有反映。如“入穈大石八石七斗为小石十四石五斗”⑤，大小石之比为87∶145＝3∶5，就是大石三石合小石五石。还有其它一些例子，都是这个比例。可见当时的比例概念已很清楚。

汉简中也有关于面积的计算，特别是长方形面积的计算。例如“守望亭北平第九十三町，广三步、长七步，积廿一步。”⑥即长×宽＝3×7＝21（平方）步。又如“一人草涂（侯）内屋上广丈三尺五寸、长三丈，积四百五尺。”⑦即13.5×30＝405（平方）尺。又如“四人马夫涂□□，长四丈九尺、广六尺，积二百九十四尺。”⑧即49×6＝294（平方）尺。还有一些问题，先求出面积，然后再几个人平分，例如

---

① 同前页④，第9页（一七七）简。

②③④ 弘一：《江陵凤凰山十号汉墓简牍初探》，载《文物》，1974年第6期，第78—84页。

⑤ 同①，第104页（二五四九A，B）简。

⑥ 同①，第67页（一五九五）简。

⑦ 《居延汉简考释·附录·敦煌汉简考释》，102*(47)235×10（王·戍役二十七）。

⑧ 同⑦，105(271)234×10。

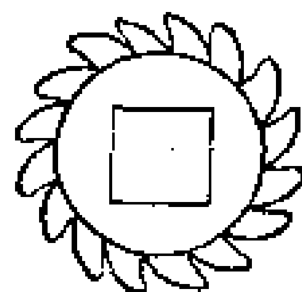
“三人马夫涂□上内地广七丈、长十丈四尺，积七百廿八尺。率：人二百卌尺…”①，即 $7\times104=728$（平方）尺，三人平分：$728\div3\approx240$（平方）尺。

我们还见到一简与长方体的体积计算有关，“𨱁广八寸、厚六寸、长尺八寸一枚，用土八斗、水二斗二升…”②，前一段是讲𨱁的容积：广、厚、长各为8、6、18寸。但是没有写出结果来，当时一定进行了计算，所以知道它能容一石二升水和土。

汉代简牍中的数学问题是比较多的，并在各方面有了广泛的应用。

工艺和度量衡中所用到的几何知识

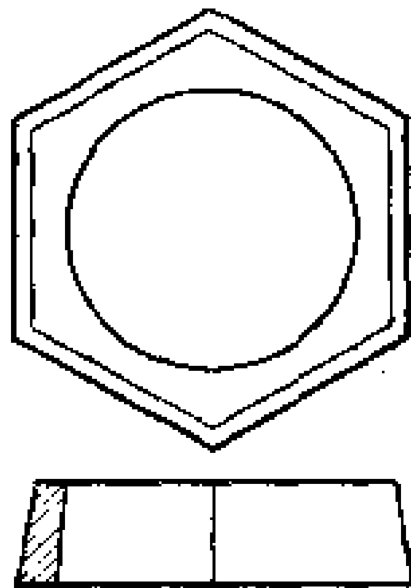
1．工艺中的几何知识。秦汉间各种手工工艺和度量衡都有很大的发展。工艺水平的提高，需要应用许多几何知识，尤其是铸造、简单机械中所用的几何知识更多。当时铜钱是一种主要货币，需要大批铸造；铜镜已普遍使用；齿轮也用于机械制造上。汉代出土的铁齿轮齿形一致、分布均匀（图1—36），制作时需要比较精确的等分圆周技术，否则，两个齿轮就不能很好地啮合。特别是象图中这样的齿轮精确度的要求就更高些。汉代一种正六棱台形的铁制车辖，其上下底均为正六边形，中间为圆



1—36　汉代铁齿轮

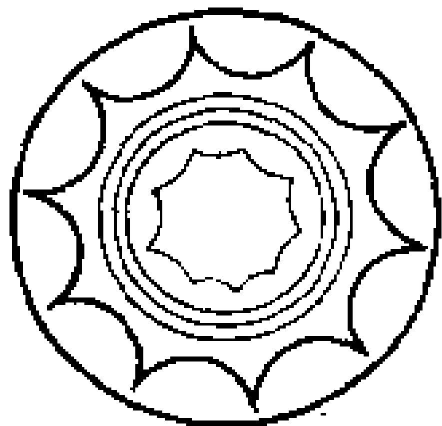
① 同前页⑦，106(261)231×10。
② 同前页⑥，第45页（一〇六六）简。

孔①，是一种规则的几何体（图1—37）。铸造铜钱用的钱范（模子）也具有几何性质，钱模排列整齐，有的排成直行，有的排成三行或均匀的六边形等等。

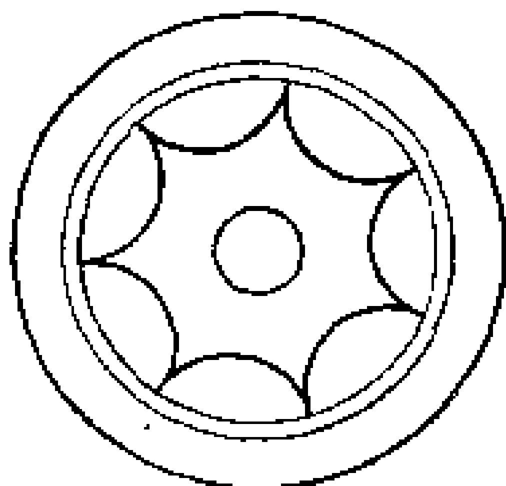


1—37 汉代铁车辖

几何内容最丰富的工艺是铜镜的铸造。秦汉时铸造的铜镜流传至今的很多（图1—38、图1—39）。镜上大都有精致的几何图案，如同心圆组、正方形、平行线、折线、等腰三角形、菱形、圆弧等都是很常见的。铜镜上多数几何图案的绘制最终都要归结为等分圆周或等分圆弧问题。现在见到



1—38 十弧连弧镜



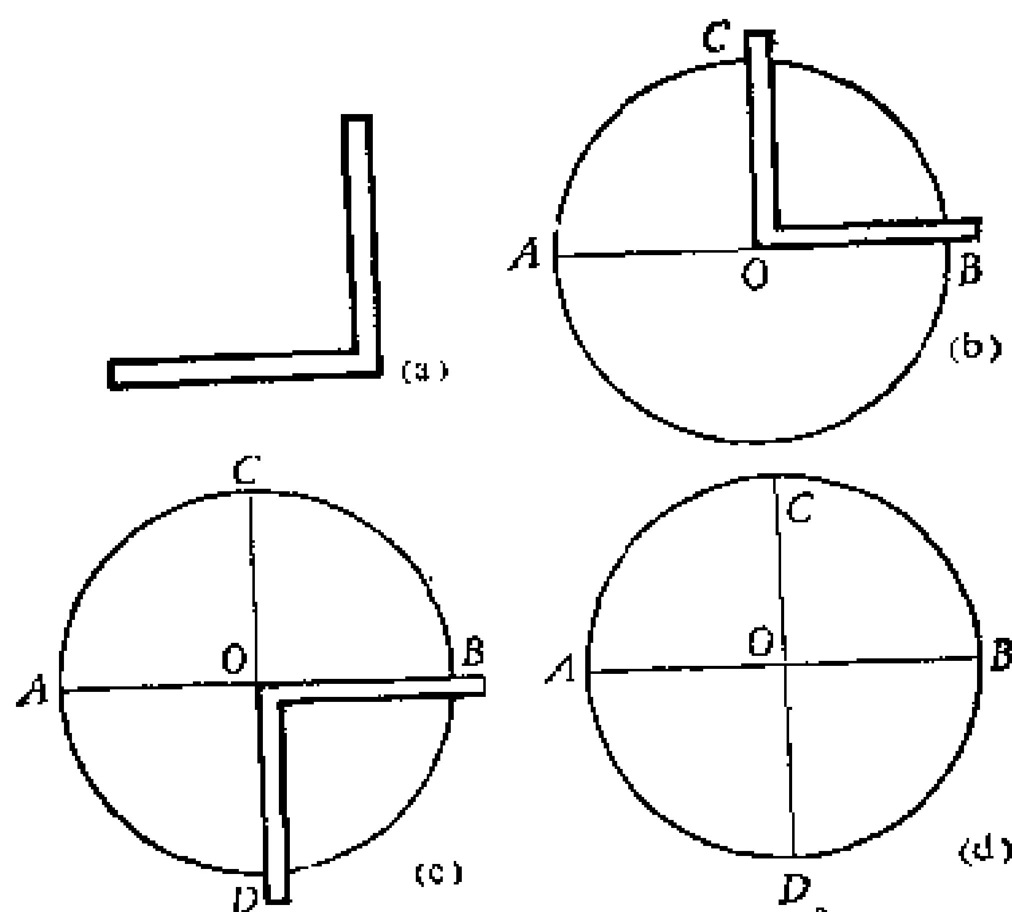
1—39 七弧连弧镜

的有4、5、6、7、8、9、10、11、12、14、16、32、43、62……等分圆周。绝大多数绘制得比较准确，估计应当有一种等分圆周的方法，但目前没有找到记载。根据现代数学理论，7、9、11等分圆周用直尺圆规是不可能的，用我国的规矩也不能都准确地等分出来，因此只能近似地画出。5、10等分圆周，虽然能用直尺圆规

① 河北省文物管理处：《磁县下潘汪遗址发掘报告》，载《考古学报》，1975年第1期，第73—116页。

准确作图，但是在我国古代可能尚未掌握。大概也是用近似方法画出的，只要近似地画出5、7、9、11……就可以用等分角方法逐步得到10、14、18、22或它们的任意2倍数的等分。然而，这些等分在铜镜上少见，最常见的是6、12、8和16等分，特别是8、16等分最多。这是因为6、12、8和16都能用规和矩准确地作图，所以铜镜上出现的也最多。

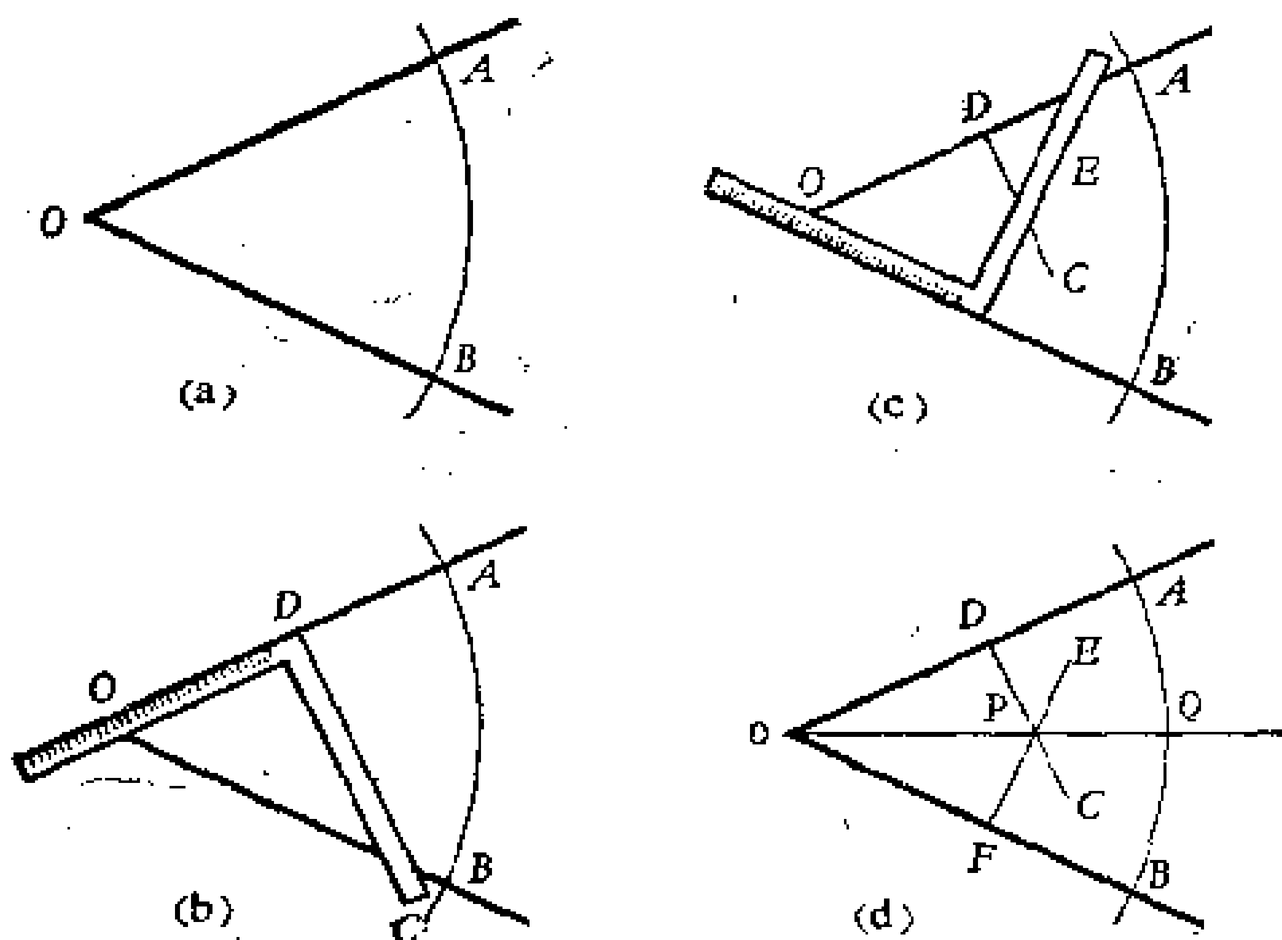
用规和矩很容易4、6等分圆周。圆内接正六边形的一边正好等于半径，其顶点就把圆周6等分。4等分圆周只要先画出圆的一条直径，再使用两次矩，就可作出图来（如图1—40）。



1—40

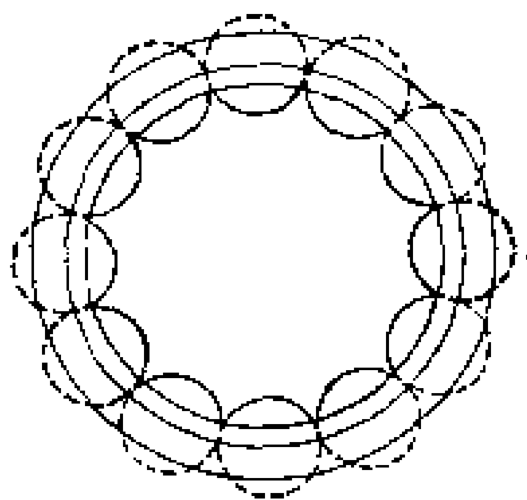
在汉代的铜镜上有不少连弧图案，经测量绝大多数都很准确。在圆形铜镜的边缘绘制均匀的连弧，也必须首先等分圆周。由于古书失载，只能提出猜测性的作法，实际上能等分一已知角就行了。假定∠AOB和弧AB是已知的（图1—41(a)），

用规矩（实际上只用矩而不用规）将它们平分。把矩的一边和角*AOB*的一边（如*OA*）对齐，沿另一边画 *OA*的垂线 *DC*（如图 1—41(b)）；再把矩翻过来使一边与角*AOB*的另一边 *OB*对



1—41

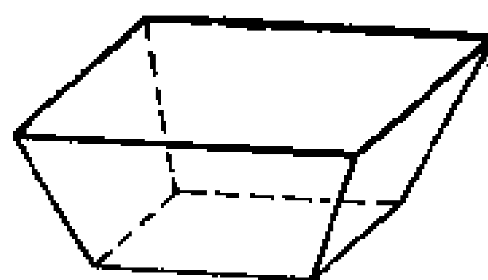
齐，并使对*OB*之刻度与前者相等，同样画出*OB*的垂线*FE*（如图 1—41(c)）。*FE*与 *DC* 交于一点 *P*，连接*O*、*P*，延长与弧*AB*交于点*Q*（如图 1—41(d)），则*OP*是角 *AOB*的平分线，*Q*是弧*AB*的中点。就这样，非常简单地把任一角或弧二等分。其实只用三次矩就够了。



1—42 连弧的作法

圆周上的连弧形几何图案容易作出，按照上面所讲的方法把圆周等分，然后以选定的长度为半径，以各分点为圆心依次画圆，便得到均匀的连弧（图 1—42）。

2．度量衡中所用到的数学。秦汉时代对于度量衡的研究与改革盛于前代，秦始皇统一了度量衡，规定全国使用标准量器。王莽执政时期又重新制定度量衡，于始建国元年（公元9年）造“律嘉量”一百多只，发到全国各地。现在收藏在各地博物馆的秦汉度量衡器物很多，如秦权、汉尺、汉斗（图1—43）、斛、天平以及王莽时的“律嘉量”等，都是研究数学史的重要资料。


1—43　汉斗

在甘肃武威磨嘴子汉墓中出土的一件木斗，口大底小，呈规则的正四棱台状。口的各边均长19、底的各边均长15.3、高13.3厘米，形状和解放前农村使用的斗大体相同。①它的容积计算公式稍复杂一点，就是$V=\frac{1}{3}h(a^2+b^2+ab)$（其中$h$是高，$a$、$b$为上、下底一边之长，$V$为容积）。至于在西汉时是否已有此公式虽然没有见到明确的记载；但以理推之，应当是有的，否则斗的容积就不会精确。可见当时已用到容积计算公式了。

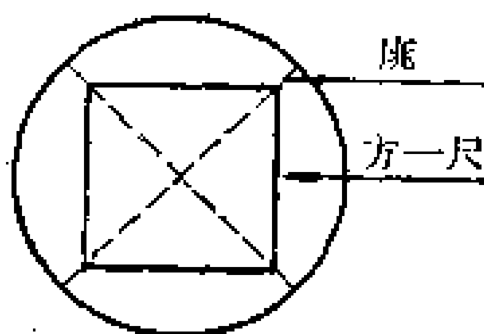
关于王莽的“律嘉量”，因有铭文流传至今，所以容积的大小和计算方法都能弄得较清楚。这种量器据记载包括五个单位，即斛（石）、斗、升、合、龠②，都是十进位，形状都是圆柱形的。五量均有铭文，内容完全一致，只是单位不同。斛的铭文是：“律嘉量斛：方尺而圆其外，庣③旁九厘五毫，幂

① 甘肃省博物馆：《甘肃武威磨嘴子汉墓发掘简报》，载《考古》，1960年第9期，第15—28页。

② 龠音月yuè。

③ 庣音条tiáo。

百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗。”① “庣旁”的意义如图1—44所示，“幂”就是面积。这个问题显然是通过圆柱形的体积计算得到的。其计算步骤相当于



1—44

$$10\pi\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}+0.095\right)^2=1620\ (\text{立方寸})$$

从这里可以反求出圆周率π的值为3.1547。

但是，1956年在河南刘家渠隋墓中发现的一件始建国元年的铜撮，其铭文是：“律，撮，方五分而圆其外，庣旁四毫，幂卌分五厘，深四分，积百六十二分，容四圭。”② 这也是类似圆柱体积的计算，即

$$4\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+0.04\right)^2=162\ (\text{立方分})$$

所用圆周率值与前面的略有不同，这里是$\pi\approx3.1679$。

从上面的例子可以看出，在西汉的度量衡研制中可能应用了体积计算的正确公式。王莽时用到了两个圆周率值3.1547和3.1679③。

前面讲到的木斗的容积和“律嘉量”的容积之间有密切关系，一木斗约等于一千撮，一斛约等于十斗，近于十进制的斛—斗换算。

---

① 《西清古鉴》卷四十三。

② 中国科学院考古研究所黄河水库考古工作队：《1956年河南陕县刘家渠汉唐墓葬发掘简报》，载《考古通讯》1957年第4期，第9—19页。

③ 白尚恕先生曾根据各种铭文逆推，得到四个不同的圆周率值，因而认为，王莽时是否创立过圆周率值值得怀疑。见白尚恕：《从王莽量器到刘歆圆率》，载《北京师范大学学报》1982年第2期，第75—79页。

天文历法中的数学知识

秦汉时期，天文历法有了很大的发展。有了连续的天文观测和数十年不间断的记录。秦朝采用颛顼①历，一直用到汉武帝时，后来为《太初历》所代替。西汉时期提出了一些天文假说，主要的有盖天说、浑天说和宣夜说。盖天说认为大地象个平面（后来又修改为中央隆起），天象口大锅扣在地上；浑天说则主张天是球形的，大地在中间；宣夜说把宇宙看作是无限的空间，天体浮生于其中，其运动需要“气”的作用，后一说法比较先进，但未引起人们的注意。“盖天说”的代表作是《周髀》（后人称为《周髀算经》）。天文学的发展，推动了数学的进步，天文学对数学的要求是很高的，没有数学，天文学中的结果和计算问题是无法解决的。

《周髀算经》是公元前二世纪、西汉初的作品，但是它包含了很早以前的史料。除了已经在本书第一节提到禹治水与勾股定理的特殊情形外，还提到周初的商高和周公的问答，时代不明的荣方和陈子的问答，还涉及到战国末期吕不韦的《吕氏春秋》。可见此书最后定本应在战国之后。这本书对数学的应用很广泛。现在把这书在天文学等方面对于数学的应用，作一介绍。

1. 分数运算。如果说在此以前已经有了较为简单的分数加减运算的话，那么在秦汉时的天文学研究中则有了较为复杂的乘除法。《周髀算经》关于月亮视运行速度的计算分为以下

---

① 颛顼音专序zhuān xū。

两步进行：

$$383\frac{847}{940}\times 13\frac{7}{19}=5132\frac{2698}{17860},$$

$$5132\frac{2698}{17860}\div 365\frac{1}{4}=14+\frac{18\frac{11628}{17860}}{365\frac{1}{4}}$$

在讨论所谓“七衡”周上一度弧长时，《周髀算经》也用到了分数除法。七衡就是以北极为圆心在平面上所画出的距离都相等的七个圆圈。例如“内一衡”：周长714000里，用周天度数$365\frac{1}{4}$去除，即

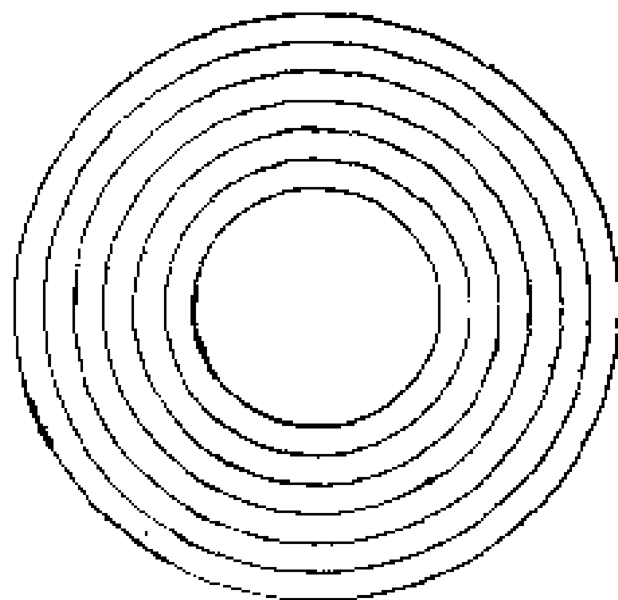
$$714000\div 365\frac{1}{4}=1954\text{里}247\frac{933}{1461}\text{步}$$

（当时300步为1里）。其余几衡也都是用类似的计算方法，这里不重复了。

比《周髀算经》稍晚的《太初历》（公元前104年）计算木星的平均速度周期时相当于下面的计算步骤：

$$33\frac{3334734}{7308711}\div 398\frac{5163102}{7308711}=\frac{145}{1728}$$

2．等差数列和圆周长求法。上面提到的七衡共有六个间隔（图1—45），《周髀算经》规定“一衡之间万九千八百三十三里三分里之一”，就是相邻两衡间的距离（半径差）为$19833\frac{1}{3}$里。要想求出各衡的直径，只要知道内衡的直径就可以了。《周髀算经》中



1—45 “七衡六间”图

给出计算各衡直径的一般法则，即“欲知次衡径，倍而增内衡之径。二之以增内衡径，得三衡径。次衡放（仿）此”。这段话的意思是说要想求出次二衡的直径，须把半径差二倍再加上第一个圆圈的直径，次三衡以及以后的都这样求。七个直径是：

内一衡径＝238,000里000步

次二衡径＝277,666里200步

次三衡径＝317,333里100步

次四衡径＝357,000里000步

次五衡径＝396,666里200步

次六衡径＝436,333里100步

次七衡径＝476,000里000步

它们每后一衡径减前一衡径的差都是39,666里200步，因此这些数是以39,666里200步为公差的等差数列。这个公差就是相邻两衡间距离的二倍，即39,666里200步＝2×19833里100步。很显然，设内一衡的直径为 D_1，次二衡的直径为 D_2，它们之间的距离为 d，则有关系

$$D_2 = 2d + D_1$$

一般地有

$$D_n = 2d + D_{n-1}$$

其中 $n = 2, 3, \cdots 7$。

《周髀算经》求出了每衡的周长，如内一衡的周长为714000里，显然是由内一衡径乘3得到的，即714000＝3×238000。这个3就是 π 的近似值。设 D_n 为直径，L_n 为周长，则有

$$L_n = \pi D_n = 2\pi d + \pi D_{n-1}$$

周长也是等差数列，公差为 $2\pi d$。

《周髀算经》关于等差数列的记载和圆周长求法都是很有价值的内容。

3．一次内插法的应用。《周髀算经》卷下关于二十四节气日八尺标杆影长的数据只有冬至和夏至是实测的，其余都由计算而得。原书是这样说的："凡八节二十四气，气损益九寸九分、六分分之一。冬至晷①长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸。问次节损益寸数长短各几何？"其中"损益"数$99\frac{1}{6}$分的求得是把冬至影长与夏至影长相减，即$1350-160=1190$(分)。因为由冬至到夏至共十三个节气，除去冬至还有十二个，用十二去除上面的差得$1190\div12=99\frac{1}{6}$（分）。设$f(a)$、$f(b)$分别代表夏至和冬至日影长，Δ为损益数，则$\Delta=\frac{1}{12}(f(b)-f(a))$。$f(n)$是夏至到冬至的第$n$个节气的日影长，它的计算公式如下：

$$f(n)=f(a)+n\Delta$$

例如求清明时日影长，便是

$$f(5)=160+5\times99\frac{1}{6}=655\frac{5}{6}\text{（分）}$$

就是影长为"六尺五寸五分，小五分"。计算中的"5"是指清明为夏至以前的第五个节气。夏至以后的节气也这样计算。

上面的公式显然是个一次内插法公式，由夏至到冬至、由冬至到夏至是时间相等的，因此为等间距②。《周髀算经》所载二十四节气日的中午八尺标杆的影长都是利用等间距一次内插法公式算出来的。后来的内插法公式都起源于历法研究，实际是一次内插法的推广。

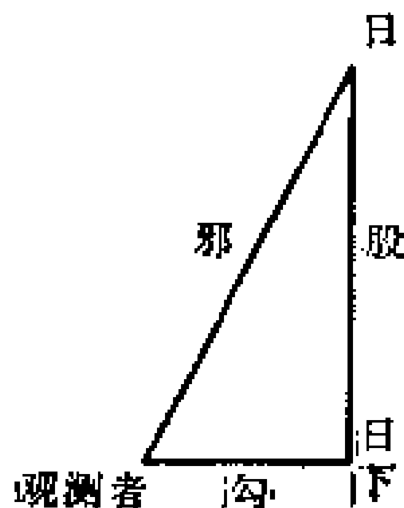
---

① 晷音规 guī。
② "等间距"的"间"指间隔，而非时间。

插

59

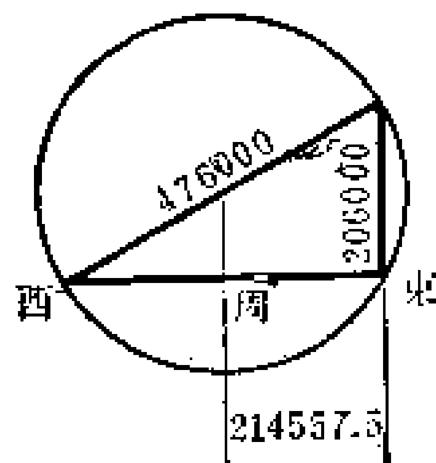
4．勾股定理的应用。《周髀算经》中广泛地应用了勾股定理解决天文问题。实际上，勾股定理决不是西汉时期突然出现的，肯定有很长的历史渊源。我国古代常把大地看作平面，求观测者到太阳的距离就是用勾股定理。《周髀算经》中“求邪（斜）至日者：以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日”（图1—46）。也就是



1—46　“邪至日”图

$$邪至日（弦）=\sqrt{勾^2+股^2}$$

这里所用之勾股定理已不限于3、4、5或它们的倍数，而是推广到了一般情形。又如“冬至之日，正东西方不见日，以算求之，日下至周二十一万四千五百五十七里半”，其意义如图，周径为476000里，勾为206000里，求股，即$\sqrt{476000^2-206000^2}=$429115里有奇，这就是圆周上的弦（西东），$\frac{1}{2}\times429115$里$=214557.5$里就是“日下至周”（图1—47）。



1—47　“日下至周”图

从这里可以看出，《周髀算经》已经记载了开平方的方法，而且是任意的正数都能开。《周髀算经》对奇零小数的处理，有时用分数表示，有时以“有奇”笼统地说明存在奇零小数。根据甄鸾注知上面问题的半里之后还应有316775/1716462，而舍去了。

5．一次不定方程问题。我国古代的历法，从《三统历》起要计算所谓“上元积年”，这个问题要归结为解一次不定方

程或一次同余式的数学问题。"上元"就是历法计算中向上逆推而规定的起算点，由上元到制历时所求年累计的年数叫"上元积年"。这种做法，据现在所知，起于《三统历》。它对上元的要求是岁首① 在冬至、月首② 在朔旦③、日首④ 在甲子日夜半，同时日月五星同会，满足这些条件的一年为上元。《三统历》中，把年、月、日的最小公倍数叫做"统法"。一统相当于1539年；年、月、日与六十甲子的最小公倍数叫做"元法"，一元相当于4617年，亦即三统为一元。汉太初元年（公元前104年）前十一月甲子、朔旦、冬至会合，很显然，《三统历》的上元积年 N 应是三统的倍数，即

$$N = 4617 \times p \qquad (p\text{为整数})$$

为了确定 p 这个数，《三统历》进一步考虑所谓"岁星超辰"问题。岁星就是木星，在以前人们测得它十二年一周天，故分周天为十二次，每年行一次。但后来发现，实际上木星每144年行145次。因为上述太初元年前十一月甲子朔旦冬至时，木星在婺女⑤ 六度⑥，所以在 $N = 4617 \times p$ 年内，木星运行 $\left(4617 \times p \times \frac{145}{144}\right)$ 次而到婺女六度，如以12除 $\left(4617 \times p \times \frac{145}{144}\right)$，所得余数应恰为木星行在婺女六度。经计算，婺女六度约为 $\frac{135}{144}$ 次到 $\frac{139}{144}$ 次之间。于是推算《三统历》的上元归到解一次不定方程

---

① 岁首就是一年开始的日子。
② 月首就是一朔望月开始的日子。
③ 朔旦就是新月的早晨。
④ 日首就是一日开始的时刻。
⑤ 婺女是十二次的一次的名称。
⑥ 我国古代把一圆周分为 $365\frac{1}{4}$ 度，与现用者不同。

$$4617\times p\times\frac{145}{144}=12q+\frac{r}{144}$$

即

$$4617\times145\times p=1728\times q+r$$

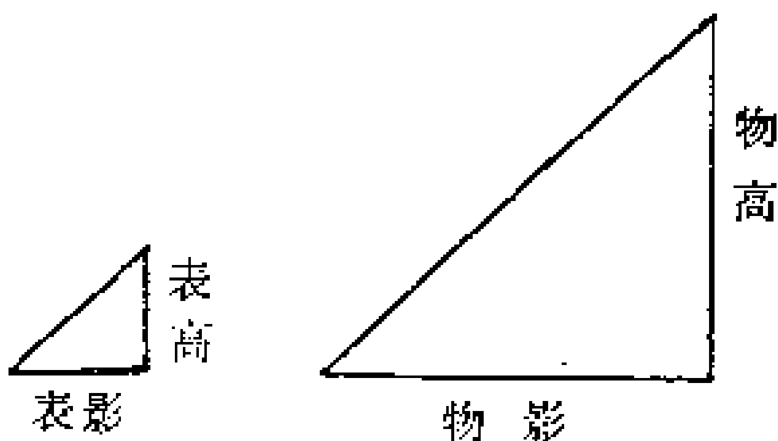
或写成如下的一次同余式：

$$4617\times145\times p\equiv r(\mathrm{mod}\,1728)$$

其中 q 为木星运行的周数，$135\leqslant r\leqslant139$。在同余式中 q 已不起什么作用，因此只要确定r,p即可求出。事实上，仅当 $r=135$时，同余式有整数解，且最小正整数解 $p=31$，于是$N=4617\times p=4617\times31=143127$，这正好是《三统历》的上元积年。[①]

《三统历》的作者[②]到底怎样求得 p，从而确定上元积年的？没有明确记载，但一次不定方程或一次同余式问题的出现则无疑问。

6．测绘术。西汉时期结合天文学的研究，测绘术有了新的进展。《淮南子》中有用表（标杆）测量方向和距离的问题，为后来重差术的嚆矢。特别重要的是该书提出一条相似形应用于测量的定理"若使景与表相等，则高与远等也"。就是要测量一个不可能到达的物体高度可以立一个标杆。当着标杆的长度和影长相等时去测量物体的影长，因而可求出要求的高度（图 1



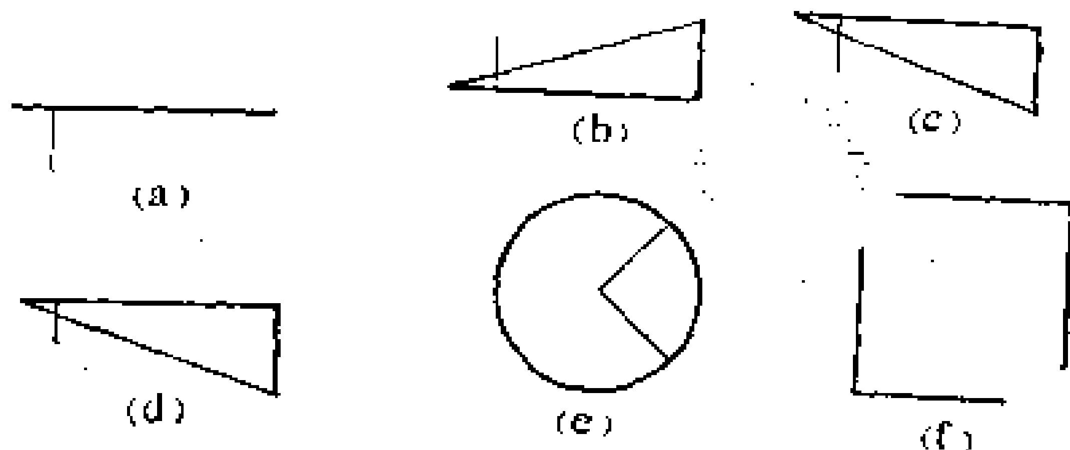
1—48 比例相似的应用

① 参见李文林、袁向东：《论汉历上元积年的计算》，载《科技史文集》第3辑"综合辑"，1980年，上海科技出版社，第70—76页。

② 《三统历》是王莽时刘歆在《太初历》的基础上改编而成的。

—48）。这显然是相似三角形对应边成比例的定理的特例。

《周髀算经》中有关测绘的内容很多。例如用竹筒测量，实际上也是以相似原理为依据的，还有拉绳测定方向等等。《周髀算经》上有一段话："平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。环矩以为圆，合矩以为方。"这是长期



1—49　"用矩之道"图

测量工作的经验总结。前四句的原理基本上一样，都是用相似直角三角形原理。头一句是说用矩的一个边去测量一线是否为直线（图1—49(a)）；第二句是指把矩的一边垂直放置去测量高度(图1—49(b))；第三句是指把矩的一个直角边垂直向下，测量深度（图1—49(c)）；第四句是指把矩平放，测量两点间的距离（图1—49(d)）。后三句话的统一原理是：设 a 为矩的一边之长，b 是矩的另一边由顶点到视线的刻度，c 是如图上所示之可测距离，x 为所求，则由 $\frac{b}{a}=\frac{x}{c}$ 有

$$x=\frac{bc}{a}$$

第五句是指矩的顶点不动，而两边在平面上旋转，其端点就画出一个圆（图1—49(e)）。第六句是把两个矩合起来构成一个正方形（图1—49 (f)）。这类问题是由天文历法引起的，而实际上已应用于其它方面，只要满足条件就可以应用。《周髀算

经》上所说的是一般法则，其应用不限于天文方面。

秦汉时期绘图已应用于科学技术。早在秦灭六国的战争中就注意绘制建筑图，“秦每破诸侯，写放其宫室建之咸阳北阪上”①，就是把六国的一些建筑画下图来，在秦的首都咸阳北面的坡地上照样重建。汉武帝时，想在奉高（在今山东泰安县东）建一座明堂，有人献上一幅图，后来照图样施工②。由此可见，当时已经广泛地使用了建筑图。

天文图的绘制，当时也很流行，《周髀算经》中讲到的“日高图”、“七衡图”等等都具有天文图的性质。关于地图的绘制，早在西汉初年就已达到一定的水平，如长沙马王堆西汉墓出土的地图，画得比较准确。

这些科学技术图有一个共同特点，就是原物都很大，当时常把图形画在墙上或丝织物上。因此必须将原物按一定的比例缩小才行。这就必然要提出比例尺的概念，在《周髀算经》中已有了这方面的明确记载。绘制《七衡图》时就用到比例：“凡为此图，以丈为尺，以尺为寸，以寸为分。分为一千里，凡用缯③方八尺一寸；今用缯方四尺五分，分为二千里。”这句话很重要，特别是后半部分，讲了两种比例：一种是“分为一千里”，就是一千里的距离在画图时要用一分长来表示，即1:180000000；一种是“分为二千里”，1:360000000。按第一种比例画《七衡图》用缯8.1平方尺；按第二种比例，由于比例增大，用缯就缩小为4.05平方尺。比例的应用，说明当时对于相似的认识已很清楚。

---

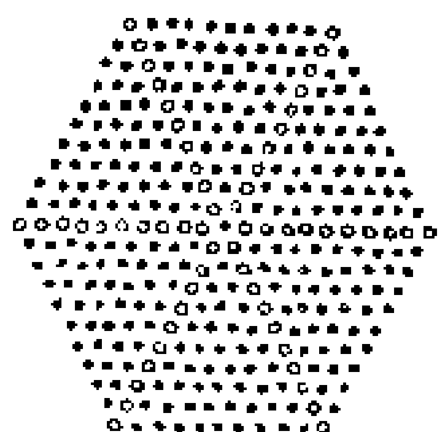
① 《史记·秦本纪》。
② 《汉书·郊祀志》。
③ 缯音增zeng，古时丝织品的总称。

早期的算具——算筹

1．筹算制度。古代既然能够计算，必然需要某种方法和工具。我国古代人民在长期实践中创造了独特的计算工具——算筹。算筹一般是用一些小竹棍（也可以用其它东西）做的，又叫筹或叫算子或策。在案上摆成数字，进行计算，叫筹算。筹在古代并不限于数字计算，比如投壶和六博游戏所用的竹棍，都叫筹。

算筹是长期演变而成的，至迟在西汉时已普遍使用。起初大概没有专门的算筹，而是随便用小树棍进行计算，因此在《方言》中有“木细枝为策”的说法。后来才演变为固定的工具。东汉许慎在《说文》中说：“算，长六寸①，计历数者。”当时关于算筹的规格已有明确记载。

西汉时的算筹是这样的：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚，而成六觚为一握。”②这里关于算筹的粗细、长短、个数都说到了。271根正好合成一个正六角形束，用一手可以握住，样子如图1—50③。



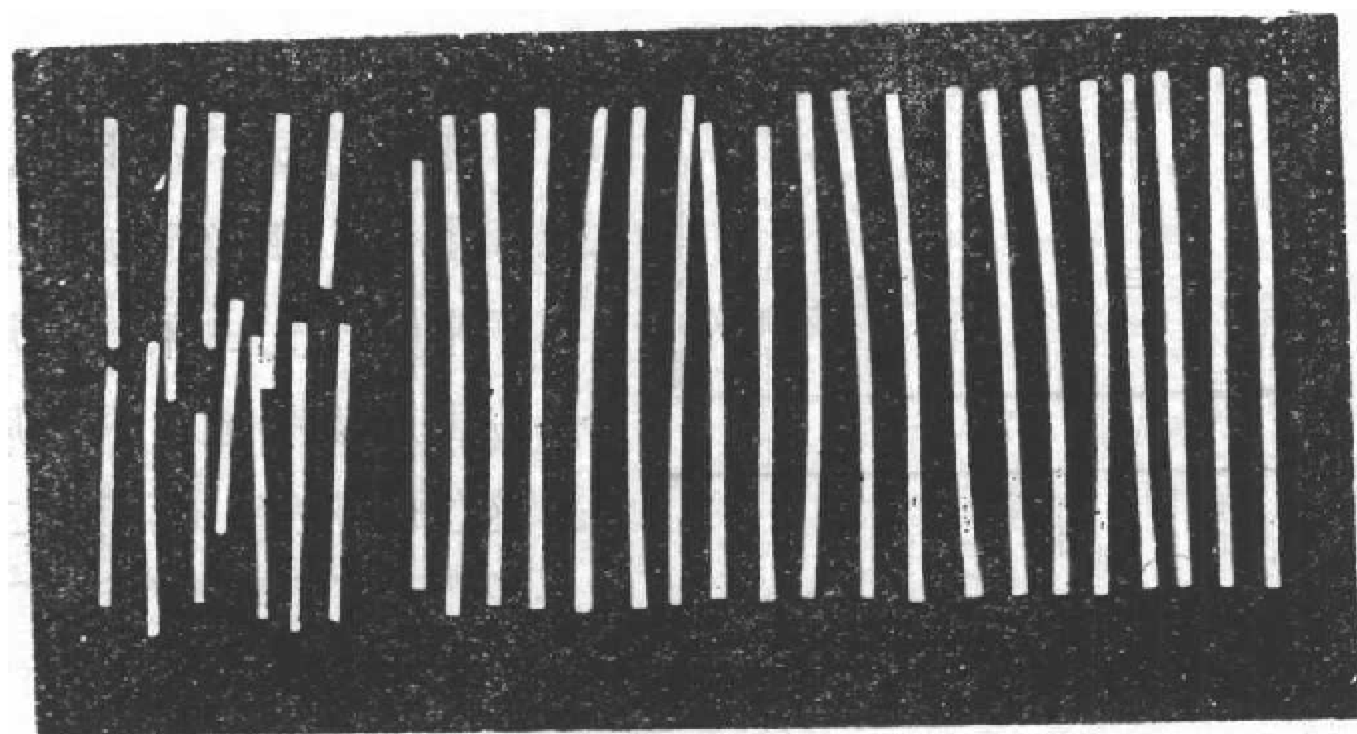
1—50　算筹“六觚为一握”图

1971年8月，在陕西千阳县的一座西汉墓中出土了一批算筹，均为兽骨制成，圆形（图1—51），装在死者腰部的一个丝囊里，说明早在西汉时代就有了盛装算筹的专门“算袋”，后

① 秦汉时的一寸相当于现在的八分多点。

② 《汉书·律历志》。

③ 李俨：《中算史论丛》，第四集，1955，科学出版社，第4页。



1—51　千阳骨算筹

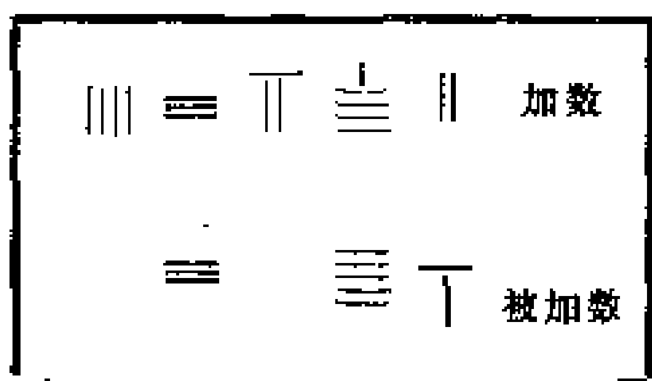
来一直沿用。其中完整者最长的为13.80厘米，最短的为12.60厘米，大多数为13.50厘米①，与文献记载基本上一致。

2．筹算算法。怎样用算筹进行计算，汉代文献上没有记载。根据后来的记载，知道有纵横两种筹式：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

算筹的摆法是纵横相间，总是个位为纵，十位为横，摆列时，次序是由右到左，如6451，筹式是𝍮𝍣𝍭𝍠。余类推。筹算加减法很简单，摆上两行，按加或减变成一行，就得结果。如43792＋3056＝46848，如下页（A）图。如遇零，便空一位。减法与此类似。关于筹算乘除法，步骤稍复杂一些，下面各举一例

① 宝鸡市博物馆等：《千阳县西汉墓出土算筹》，载《考古》，1976年第6期，第85—88、108页。

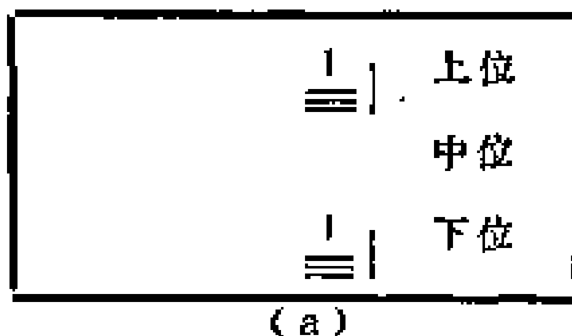




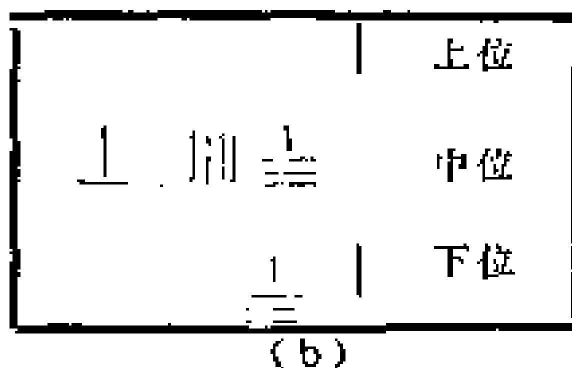
(A)

说明。

乘法分三层：上位、中位和下位，相当于被乘数、积和乘数，先由乘数的最大一位去乘被乘数，乘完后去掉这位的算筹，再用第二位



(a)



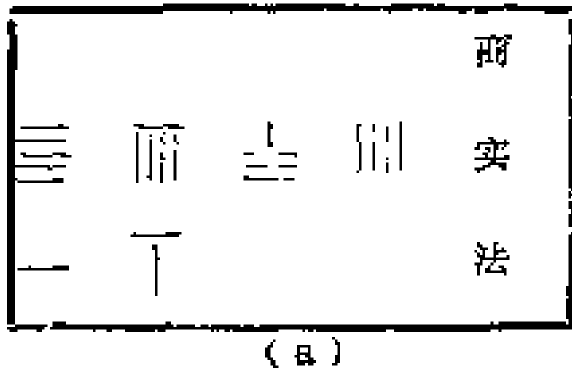
(b)



(c)

数去乘。两次之积对应位上的数相加，乘完为止。如81×81，先摆成右边图(a)的样子，用80去乘81得6480，“8”用完了，将其去掉，得图(b)，再用1去乘81得81加到6480上，和为6561，“1”也用完了，去掉，于是有图(c)。计算层次很清楚，就是把多位数乘多位数变为用单位数去乘多位数，乘一位加一位。基本思想和现在的笔算乘法完全一样，所不同的一用笔一用筹，再有就是使用乘数的次序两者相反。

除法也分三层：上位是商，中位是被除数（叫做实），下位是除数（叫做法）。除数摆到被除数够除的那一位之下，除完向右移动。例如5984÷16，因5不够16除，所



(a)

以16应摆在59之下，6与9对齐，如图（a）。用16去除59得商3，余1184，将16向右移一位如图（b）。再用16去除118得商7（十位），余64。将16向右移至个位，如图（c）。最后用16去除64，得4，恰尽，商数为374，如图（d），如果除不尽，就摆在那里，呈带分数形式。

商
实
法
（b）

商
实
法
（c）

商
（d）

剩下的还有开方算法，将在下一节结合文献记载加以介绍。

第四节 《九章算术》

——初等数学体系的形成

我国的数学，经过长期积累，到西汉时期，已经有了很丰富的内容。早期的数学知识大都是比较孤立的，没有建立起内部联系。虽然墨家学派曾尝试用逻辑方法研究数学概念，但是没有形成体系。大约经过了四百年左右，到西汉末期，出现了专门的数学著作，特别是《九章算术》的完成，标志着我国的初等数学已形成了体系。

《九章算术》的编纂

1．《九章算术》的成书。《九章算术》是我国流传至今

最早的一本数学著作。它的完成经过一段历史过程。西汉末年曾经有过《许商算术》和《杜忠算术》等书，但都没流传下来。

许商（一作许商），字长伯，长安人。公元前32年到前8年他曾在西汉政府担任将作大匠、大司农和河堤都尉等官职。许商参加过治水工作，精通天文历法，“善为算”，著《许商算术》二十六卷，以及与天文历法有关的著作《五行论历》①。

杜忠与许商同时代，著《杜忠算术》十六卷。②

现传本《九章算术》成书于什么时候，目前众说纷纭，多数认为在西汉末期到东汉初期之间，也有认为早到西汉中期的。③实际上，《九章算术》不会成于王莽执政之前，这是因为：第一，西汉末河平三年（公元前26年），陈农曾派人在全国访求遗书，尹咸校对数术之书，只有《许商算术》和《杜忠算术》，而没有《九章算术》。第二，和陈农等同时代的刘向、刘歆父子也在这时领校秘书。刘向作有目录书《七略》，其中也没有《九章算术》。这说明当时还没有以“九章”命名的数学著作。它有可能是刘歆在其父完成《七略》之后，在《许商算术》和《杜忠算术》的基础上重加整理而成，即应在王莽执政期间才有了以《九章算术》为名的数学著作。《许商算术》和《杜忠算术》在东汉时再无人提起，同时很快失传，

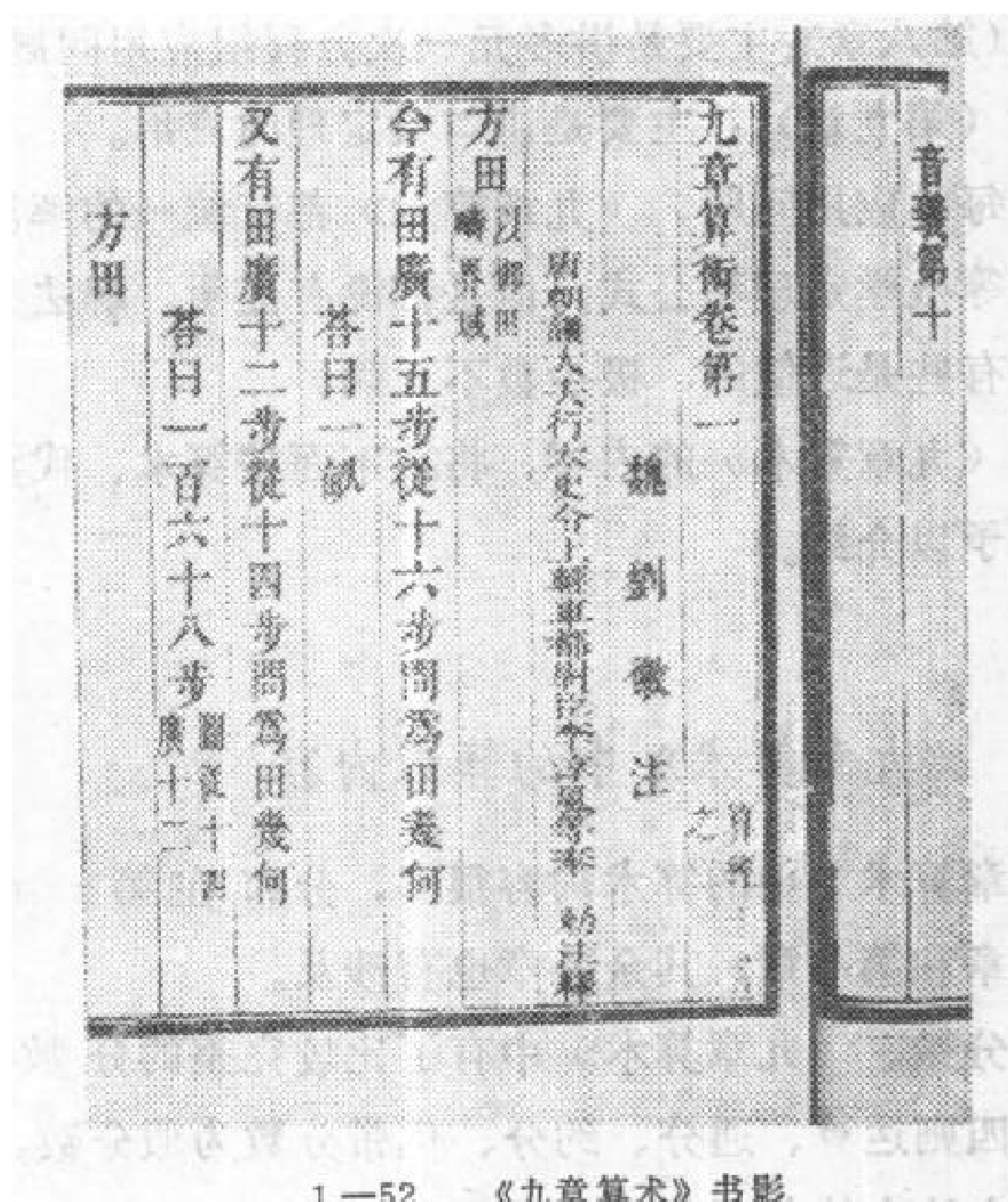
---

①② 《汉书·艺文志》等。

③ 钱宝琮等主张成书于东汉初年，即公元50到100年之间，见钱主编的《中国数学史》第32—33页。李俨和杜石然认为至迟在公元后一世纪《九章算术》已经写定为和现传本大致相同的样子，见李俨、杜石然合著《中国古代数学简史》上册，第49页。笔者认为成书于王莽时代，见《数学通报》1956年第7期。李继闵主张成书于公元前一世纪的前半期，见《数学学报》第18卷第4期（1975）。陈直主张成书于西汉中期，见《西北大学学报》（自然科学版），1957年第1期。

和《九章算术》的出现可能有关。《九章算术》在很大程度上起了代替这两部书的作用。

2．《九章算术》的体例。《九章算术》内容丰富，全书共有246道应用问题，大体按数学性质分为九个大类，组成九


音義第十

九章算術卷第一

魏 劉 徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二

方田

1—52 《九章算术》书影

章，每章为一卷。各章的名称和基本内容如下：

方田（第一章）：主要是讲平面形面积的计算和分数算法。

粟米（第二章）：主要是讲各种比例问题。

衰分（第三章）：主要是讲比例配分问题。

少广（第四章）：主要是讲开方问题。

商功（第五章）：主要是讲立体形体积的计算问题。

均输（第六章）：主要是讲根据均输法纳税和输送等方面的计算问题。

盈不足（第七章）：主要是讲算术中盈亏问题的解法和比例问题。

方程(第八章):主要是讲多元一次方程组应用问题的解法。

勾股（第九章）：主要是讲勾股定理的应用。

对于每类应用问题，《九章算术》都有统一的解法，相当于一些初等数学定理和公式。但是都没有证明。解法大部分是正确的，有些是近似的，极少数不正确。

关于《九章算术》的内容，将在下面按算术、代数、几何三个方面予以介绍。

《九章算术》中的算术内容

《九章算术》中的算术内容很多，分布在第一章、第二章、第三章和第七章，其余各章也有涉及。

1. 分数。《九章算术》中有了比较完整的分数计算方法，包括四则运算、通分、约分、化带分数为假分数，等等。其步骤和方法大体与现代的步骤一致。

分数加减运算，《九章算术》已明确提出先通分，使两分数的分母相同，然后进行加减。加法的步骤是“母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一”。“实”是分子，“法”是分母。“实如法而一”就是用法去除实。设有分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，其加法步骤为

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

减法的步骤与此完全一样，只是在算术范围内要求须“以少减多”，就是从大数中减去小数。《九章算术》中还注意到两个问题：其一是算出结果后，“不满法者，以法命之”，即分子小于分母时便以分数形式保留。其二是“其母同者，直相从之”，就是分母相同的分数进行加减，运算时不必通分，使分子直接加减即可。

分数乘法是“母相乘为法，子相乘为实，实如法而一”。就是

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

《九章算术》对分数除法虽然没提出一般法则，但算法也很清楚。如“有三人三分之一人，分六钱三分钱之一，四分钱之三，问人得几何”这就是分数除法问题。书上的解法是“以人数为法，钱数为实，实如法而一”，即$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}$。在计算过程中，显然需要首先把带分数化为假分数。

《九章算术》有求最大公约数和化简方法。求最大公约数的方法很有创造性，叫做“更相减损”，求出后进行约分，使分数成为既约的。其具体步骤是：“可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”（方田章）这里开头的一句话是说在分子分母都是偶数的情况下，都能用2除，即“可半者”，便约去2。不能用2除开的两数则另外摆算筹进行计算（这叫“副置”）。把分子和分母从大数减去小数，互相减，减到余数和减数相等为止，这数就是原来两数的最大公约数。用最大约数去除分子和分母，就

得到既约分数。例如，将$\frac{49}{91}$化为既约分数，就要“副置”49和91，“更相减损”求最大公约数。即从91减去49余42，从49减去42余7，再从42连减7五次余7。这个7就是所求，以它约$\frac{49}{91}$得$\frac{7}{13}$。这种求法今天仍可使用。

在分数的加减运算中，已知用最小公倍数作公分母，例如《九章算术》有相当于分数

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\\
&=\frac{420}{420}+\frac{210}{420}+\frac{140}{420}+\frac{105}{420}+\frac{84}{420}+\frac{70}{420}+\frac{60}{420}\\
&=\frac{1089}{420}
\end{aligned}
$$

的运算。这个公分母420正是1、2、3、4、5、6、7的最小公倍数。

2. 比例算法。在《九章算术》的第二章、第三章、第六章和第九章中，广泛地使用各种比例解决应用问题。“粟米章”一开头就给出了各种粮食间互换的比例关系：“粟率五十，粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，……”共二十种，然后给出了计算方法：“以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。”用现代的方式表达就是公式：

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}$$

这是由比例式

所求数∶所有数＝所求率∶所有率

变换来的。例如书中第一个问题是“今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？”其中“粟米一斗”是“所有数”，把它换成粝米，这粝米数即“所求数”。按规定“粟率五十”为“所有率”，粝米三十为“所求率”。但50与30之比为5:3，故有：

$10\times3\div5=6$（升），即书上所说："以粟求粝米，三之，五而一"。

《九章算术》中有非常复杂的比例问题，例如均输法的问题中有比例分配，项数很多。有的问题包括六个县的赋税输纳。现以"均输章"第一题为例来说明当时比例分配的算法。

"今有均输粟：甲县一万户，行道八日；乙县九千五百户，行道十日；丙县一万二千三百五十户，行道十三日；丁县一万二千二百户，行道二十日，各到所输。凡四县赋，当输二十五万斛，用车一万乘。欲以道里远近，户数多少，衰① 出之。问粟、车各几何？

答曰：

甲县粟八万三千一百斛，车三千三百二十四乘。

乙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丁县粟四万五百五十斛，车一千六百二十二乘。"

这里的计算方法是每乘车输粟按平均数计算，即$250000\div10000=25$斛。车数和粟数在四县中与户数成正比，与道里远近成反比进行分配。因此计算步骤如下：

$$\frac{1000}{8}=125,\ \frac{950}{10}=95,\ \frac{1235}{13}=95,\ \frac{1220}{20}=61$$

$125+95\div95+61=376$作为分配的共同分母，以总车数"乘未并者，各自为实。实如法而一"所得为各县所出车数，即

$$\frac{10000\times125}{376}=3324.2\cdots,\ \frac{10000\times95}{376}=2526.5\cdots,$$

① 衰音崔cuī，按一定等级递降。

$$\frac{10000\times95}{376}=2526.5\cdots,\quad \frac{10000\times61}{376}=1622.4\cdots$$

但是，车数不能是奇零小数，所以《九章算术》采取了“有分者，上下辈之”，即四舍五入的办法，得整数3324、2527、2527和1622，为甲、乙、丙、丁四县各出之车数。各县的车数乘以25斛，就得各该县所出粟的斛数。

上面的计算实际上就是反复运用单比例公式的。《九章算术》中复比例和连比例等方面的问题都有，已包括了现代算术中的全部比例的内容，形成了一个完整的系统。印度于五、六世纪间有“三率法”；欧洲在更晚的时期也有类似的算法。三率法相当于

$$\frac{a\ （所有率）}{b\ （所求率）}=\frac{c\ （所有数）}{d\ （所求数）}$$

的比例式，和《九章算术》的算法一致。但却都在《九章算术》之后。

3．盈亏问题。《九章算术》第七章“盈不足”专讲盈亏问题及其解法，例如“人出八盈三，人出七不足四，求人数、物价各几何”，这就是一个盈亏问题。如果假定每人出钱 a_1，盈（或不足）b_1；每人出钱 a_2，不足（或盈）b_2，人数为 m，物价为 n，则有

$$m=\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$$

$$n=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1-a_2}$$

将例中的数字代入，则

$$m=\frac{4+3}{8-7}=\frac{7}{1}=7$$

$$n = \frac{7 \times 3 + 8 \times 4}{8 - 7} = 21 + 32 = 53$$

$m = 7$，$n = 53$为书上的答案。在计算中，“人出钱”数总是正的，$a_1 - a_2$若得负值则调为$a_2 - a_1$。“盈”是正数，“不足”为负数，故上面的计算中$7 \times 3 + 8 \times 4$是由$7 \times 3 - 8 \times (-4)$而来，$4 + 3$由$3 - (-4)$而来。在《九章算术》中把这种计算直接取相当于下面的公式：

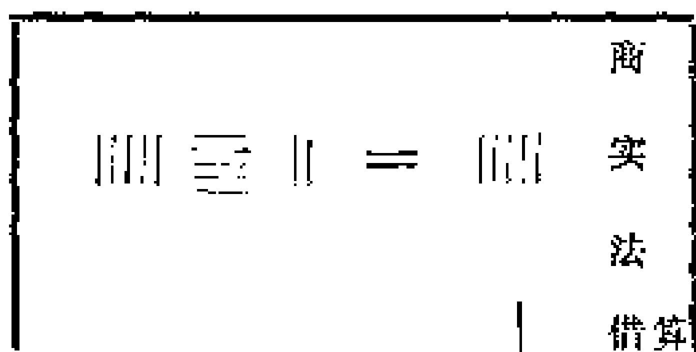
$$m = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

$$n = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 - a_2}$$

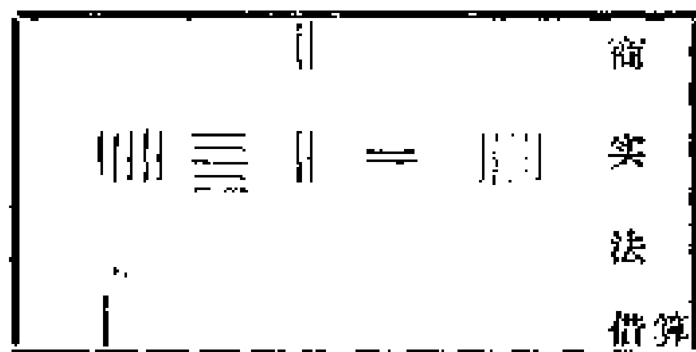
因为在问题中“先出”、“后出”没有次序关系，所以用《九章算术》的公式算出的结果是对的。这是典型的“盈不足”公式。如果是两盈或两不足，分子就得相减了，都是以小减

用到了开平方，但未讲如何开法。《九章算术》中讲了开平方、开立方的方法，而且计算步骤和现在的基本一样，所不同的是古代用筹算，比较麻烦。现在以$\sqrt{55225}$为例说明古代筹算开方的步骤。

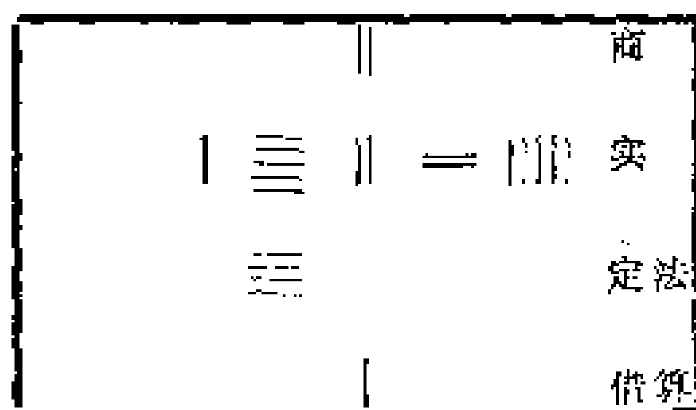
筹算开方分三层，上层为议得的方根叫做“商”；中层为被开方数，叫做“实”；下层为开方过程中去“除”被开方数的那个“除数”，叫做“法”。三层之下，还要摆一根筹，叫做“借算”，起指示位数的作用，同时又代表最高次项的系数。由个位开始向左移，每两位移动一次，有一位议得一数。图（a）为没开方时的原式，“实”是五位数。其商为三位数。第一位由5开得，将借算移至最左的5下，议得商为2如图（b）。这时以商2乘10000得20000，为“法”。再以商2乘“法”得40000，从“实”中减去，得15225，将“借算”移至第三位之下。把“法”加倍，向右移一位，得4000，为“定法”，如图（c）。这时对15225开平方，再议得商为3（十位）。以3乘100得300，加定法得4300。再以3乘



（a）



（b）



（c）



（d）

之，得12900。从"实"中减去它得2325，如图(d)。再以300（即前面的3×100)与4300相加得4600。向右移一位，变为460，是为第三位方根的定法，把"借算"移到个位之下，如图(e)。议得商的第三位（个位）应为5，经计算恰尽，所得根235。这是按筹算布算进行计算的，看起来好象很繁琐，实际上步骤清楚整齐。如以现代形式加以说明，就是：

商
实
定法
借算

(e)

设A为实，a_1为商的最大一位数，前边的计算步骤$55225-2\cdot2\cdot10000=55225-40000=15225$，相当于$55225-200\cdot200=55225-200^2=15225$，即

$$A-a_1\cdot a_1=A-a_1^2 \qquad (1)$$

把"定法"、"借算"分别向右移一位、二位。

设a_2为商的第二位数，计算步骤$55225-2^2\cdot10000-(2\cdot2000+3\cdot100)\cdot3=55225-100(20+3)^2=2325$相当于$55225-(200+30)^2=2325$，即

$$A-a_1^2-(2a_1+a_2)a_2=A-(a_1+a_2)^2 \qquad (2)$$

把"定法"、"借算"分别向右移一位、二位。

设a_3为商的第三位数，则有

$$A-(a_1+a_2)^2-[2(a_1+a_2)+a_3]a_3$$
$$=A-(a_1+a_2+a_3)^2 \qquad (3)$$

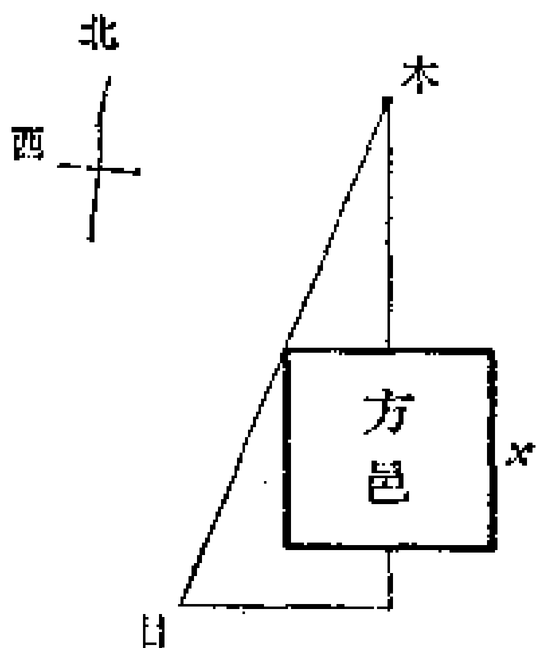
经计算，恰尽，则$a_1+a_2+a_3=200+30+5=235$即为55225之算术平方根。

由(1)、(2)、(3)三式来看，《九章算术》的开平方原理与现代开方原理相同。其中"借算"的右移相当于一次变

换，而向左移也可以理解为代换。《九章算术》中并没有理解到变换和代换，但是这对以后宋元高次方程解法是有影响的。

2．二次方程问题。《九章算术》“勾股”章第20题是相当于解一元二次方程的问题，原题是：

“今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？”



1—53 方邑题补图

所谓“邑方”就是正方形小城的一边之长。命其为x（图1—53），根据题意，再经整理可得方程

$$x^2+34x=71000$$

书中用“带从①开方法”求方程的正根。即“以出北门步数乘西行步数，倍之，为实②。并出南门步数，为从法③。开方除之，即邑方”。这段文字的前半句就是二次方程，而“开方除之”是指解法。解的步骤相当于$x=-17+\sqrt{17^2+71000}=250$（步）。这就是书上的答案。很显然，与下面的求根公式

$$x=\frac{-34+\sqrt{34^2+4\times71000}}{2}$$

吻合。这是我国解一元二次方程的起源。

3．正负数。《九章算术》不仅有了正负数概念，而且还

① 从在这里读作纵zōng，“带从”就是包含长或宽或高为未知数的问题，本题为正方形，因此长为未知数。

② 常数项。

③ 一次项系数。

建立了正负数加减计算法则。"方程"章第二题由于解题的需要，首先讲了这个重要问题：

"正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。"

这里所说的"同名"、"异名"分别相当于现在所说的同号、异号。"相益"、"相除"是指二数绝对值相加、相减。"无"具有零的意思。上引术文的前四句说的是正负数减法法则，设$a>b>0$，可表达为下式：

同名相除：$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$

异名相益：$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$

正无入负之：$0-(+a)=-a$

负无入正之：$0-(-a)=+a$

后四句说的是正负数加法法则，也可表示成下面的形式：

异名相除：$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$

同名相益：$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$

正无入正之：$0+(+a)=+a$

负无入负之：$0+(-a)=-a$

正负数乘除法则，在《九章算术》中还没有，到十三世纪以后才出现。

在外国首先承认负数的是七世纪印度数学家婆罗门笈多（Brahmagupta，约公元598—？），他也是把负数当做亏欠的数量。欧洲到十六世纪才普遍承认负数。

4．多元一次方程组及其解法。《九章算术》"方程"一章主要是讲多元一次方程组及其解法。这里的"方程"和现在的方程式完全不同，不是指的那种含有未知数的式子，而是由一些数字排列成的长方形阵。《九章算术》中的多元一次方程组

解法，是将它们的系数和常数项用算筹摆成“方程”。消元的过程则相当于高等代数中的线性变换。下面举“方程”章第一题为例加以说明：

“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”其中“禾”是庄稼，“秉”是捆，“实”是粮食，这是一个三元一次方程问题。根据书上的文字，可左、中、右摆成三列。如按矩阵排列，则把左、右改为下、上，用阿拉伯数码代替筹式即可。但中国古代的“方程”与现代矩阵决不相同。为了节省篇幅，我们用现代形式介绍其解法。

左　中　右

上禾　中禾　下禾　实

设 x、y、z 分别为上等、中等、下等庄稼每捆打粮食的斗数，则有方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 2x+3y+z=34 & (2) \\ x+2y+3z=26 & (3) \end{cases}$$

按《九章算术》的解法，“以右行上禾遍乘中行，而以直除”，就是用（1）式 x 的系数 3 去乘（2）的各项，得

$$6x+9y+3z=102 \qquad (4)$$

由（4）累减（1）二次，有

$$5y+z=24 \qquad (5)$$

再用 $3\times(3)$，得

$$3x+6y+9z=78 \qquad (6)$$

由（4）减（1）一次，有

$$4y+8z=39 \qquad (7)$$

把同样办法用于（5）和（7），消去y，有$z=2\frac{3}{4}$（斗）。然后依次求得$y=4\frac{1}{4}$（斗），$x=9\frac{1}{4}$（斗）。这就是书上的答案。

《九章算术》中的解法相当于现在的加减消元法，不过比较繁琐。它不是把对应项系数互乘，而只是"一面"乘，然后累减，书上叫做"直除"。由此可见其解法的原始性和初创性。外国对方程组的研究在十七世纪，和"直除法"类似的方法则为十八世纪法国数学家别朱（E.Bezout，1730或1739—1783）所建立。

在《九章算术》中，还有一道"五家共井"问题，是说五户人家共同使用一口井，各家都有提水用的绳子，但都不够长，甲户的两条（同长，下同）和乙户的一条合起来够用；乙户的三条和丙户的一条合起来够用；丙户四条与丁户的一条合起来够用；丁户的五条与戊户的一条合起来够用，戊户的六条与甲户的一条合起来也够用，问井深和各户"一绳之长"。

假定甲、乙、丙、丁、戊各户的每条绳长分别为x、y、z、u、v，井深为a，则有

$$\begin{cases}2x+y=a\\3y+z=a\\4z+u=a\\5u+v=a\\6v+x=a\end{cases}$$

这里五个方程有六个未知数，是不定方程组。书中给出一组解：$a=721$寸，$x=265$寸，$y=191$寸，$z=148$寸，$u=129$寸，

$u=76$寸。这是世界上最早的不定方程组。

《九章算术》中的几何内容

《九章算术》总结了大量的几何知识，分布在“方田”、“商功”、“勾股”等各章中。以下分三个方面进行介绍：

1．面积计算。《九章算术》“方田”章集中讲了面积的计算问题。以现代数学符号给出书中相应的面积计算公式。（以下用S代表面积）

（1）正方形（方田）：

$$S=a\times a$$

（2）长方形（直田）：

$$S=a\times b$$

（3）三角形（圭田）：

$$S=\frac{1}{2}ah$$

（4）梯形（邪田，箕田）：

$$S=\frac{1}{2}h(a+b)$$

（5）圆（圆田）：书中用四种形式计算圆面积。令d为直径，l为周长，则有

$$S=\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}d,\qquad S=\frac{1}{4}ld,$$

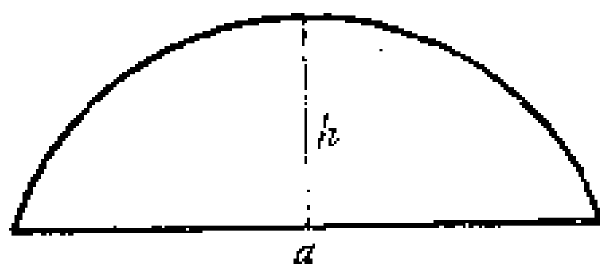
$$S=\frac{3}{4}d^2,\qquad S=\frac{1}{12}l^2。$$

当时圆周率值用“3”，因此这几个公式都能化为$S=\pi r^2$ $\left(r=\frac{1}{2}d\right)$。

（6）弓形（弧田）：

$$S=\frac{ah+h^2}{2}$$

这个公式是近似的（图1—54）。



1—54　"弧田"图

根据这些公式，可知当时关于常见的平面形面积的计算法则都已有了，其它形状的平面形面积的计算大都可以转化为这些公式中的某一种。

2、**体积计算**。立体的形状较多，而且复杂。所以《九章算术》中体积计算问题比面积计算问题多，可以说包括了所有的简单立体图形。下面以V表示体积，h表示高。

（1）立方体：

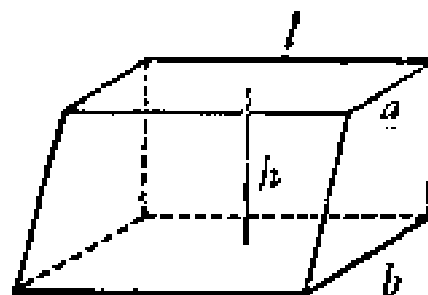
$$V=a\times a\times a$$

（2）长方体：

$$V=a\times b\times c$$

（3）楔形平截体（图1—55）：

$$V=\frac{a+b}{2}\times l\times h$$

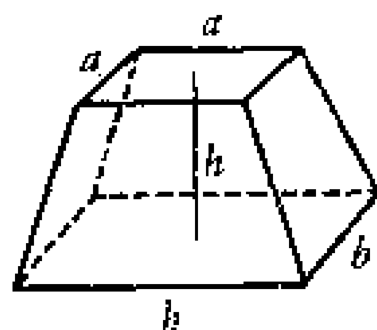


1—55　楔形平截体

（4）圆柱：

$$V=\frac{1}{12}l^2h$$

其中l为底之周长，取π为3，则公式可化为$V=\pi r^2h$。



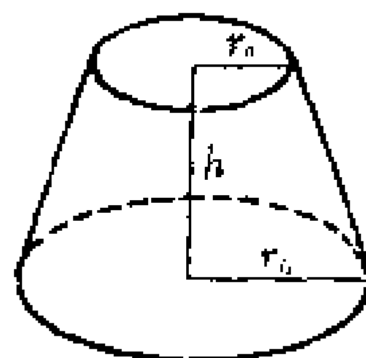
1—56　正方台

（5）正方台（图1—56）：

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$$

（6）圆台（图1—57）：

$$V=(l_1^2+l_2^2+l_1l_2)\frac{h}{36}$$



1—57　圆台

其中 l_1，l_2 为上下底周长，因此也可化为

$$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$$

（7）四角锥：

$$V=\frac{h}{3}A\text{（}A\text{：底面积）}$$

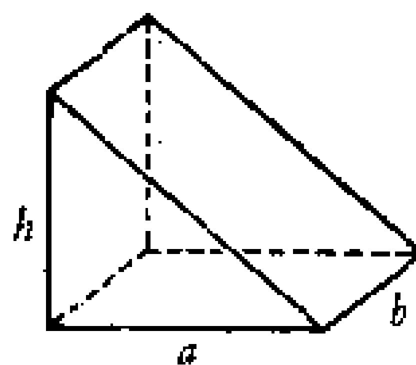
（8）圆锥：

$$V=l^2\times\frac{h}{36}$$

l 为底之周长，也可化为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

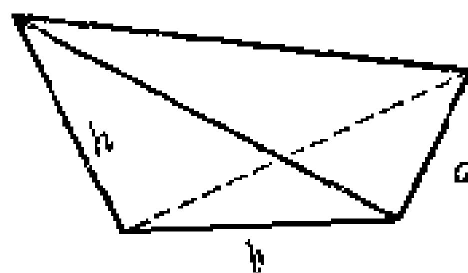
（9）长方体的斜截体（堑堵）（图1—58）：



1—58　"堑堵"

$$V=ab\times\frac{h}{2}$$

（10）底为直角三角形，一棱垂直于一锐角顶点的三棱锥（鳖臑①）（图1—59）：



1—59　"鳖臑"

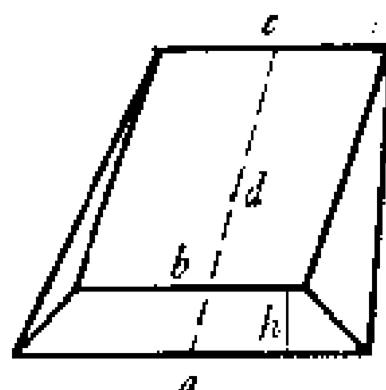
$$V=\frac{h}{6}\times a\times b$$

---

① 鳖臑音 biē nào，臑是牲口的前蹄，这里是用鳖前蹄的形状形容一种立体的形状。

（11）楔形体（羡除）（图 1—60）：

$$V=\frac{h}{6}\times d\times(a+b+c)$$



1—60 “羡除”（楔）

它的一端为梯形，是个近似公式。

《九章算术》中没有直接给出球的体积计算法则。但在“少广”章有一“开立圆”问题。即已知球的体积 V，反求其直径 d，有相当于下面的公式：

$$d=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$$

由此求 V，则有

$$V=\frac{9}{16}d^3$$

令 $d=2r$，$\pi\approx3$（《九章算术》中所用之值），则可化为

$$V=\frac{3}{2}\pi r^3$$

这个公式与准确的公式比较大 $\frac{1}{6}$，因此误差很大。

3．勾股定理及其应用。《九章算术》以前虽然已经有了勾股定理，但主要是在天文方面的应用。《九章算术》用得很广，而且该书先讲了勾股定理及其变形，然后才讲应用，这已注意到了逻辑性。定理及其变形的叙述如下：

“勾股各自乘，并而开方除之，即弦。”

“又股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。”

“又勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。”

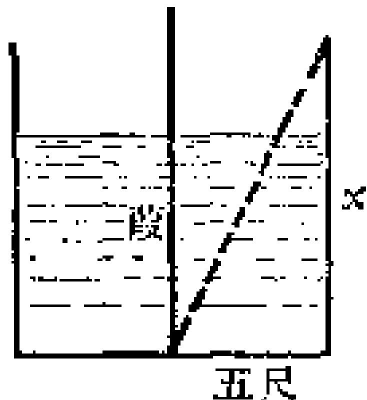
这三句话相当于下面的三个公式：

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad a=\sqrt{c^2-b^2},\quad b=\sqrt{c^2-a^2}。$$

就是说，已知 a、b、c 中的任意两个都可以求出剩下的一个。

《九章算术》在讲了上述勾股定理之后，解决了二十个应用问题，下面举两个例子。

例 1：“今有池方一丈，葭①生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适于岸齐。问水深、葭长各几何？”

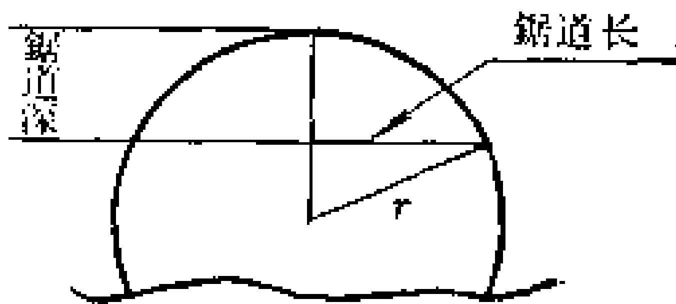


1—61 “葭生池中”

设 x 为水深，则葭长 $=x+1$，由图 1—61知用勾股定理可得$5^2+x^2=(x+1)^2=x^2+2x+1^2$。经整理有 $5^2-1^2=2x$，于是 $x=\frac{5^2-1^2}{2}=12$（尺）。葭长 $=x+1=12+1=13$（尺）。书上解法说“半池方自乘，以出水一尺自乘，减之。余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长”。和现代解法的最后步骤相同。印度古代有著名的“莲花问题”，只有数据与《九章算术》“葭生中央问题”不同，其余完全相同，但却晚了一千多年。

例 2：“今有圆材②，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？”这是有名的“锯圆材问题”。

设 r 为圆材的半径（图 1—62），由勾股定理有 $r^2=5^2+(r-1)^2=5^2+r^2-2r+1$，得$2r=26$（寸），即圆材直径。



1—62　锯圆材问题补图

《九章算术》早已流传到许多国家，现在已有日、英、俄、德等各种文字的译本。

① 葭音加jiā，一种芦苇类植物。
② 圆材就是圆柱形的木材。

把《九章算术》和西方最早的一本数学著作《几何原本》比较一下就会发现，它们各有特点：《几何原本》以形式逻辑方法把全书内容贯穿起来，而《九章算术》则以问题的性质分类编排；《几何原本》以几何为主，略有一点算术内容，而《九章算术》则包含了算术、代数、几何等我国当时数学的全部内容；《几何原本》中没有谈到应用问题，而《九章算术》则以解应用问题为主。这两部数学书的不同特点在东、西方有深刻的影响，形成东、西方数学的不同风格。

第 二 章

东汉初期到元代中期

（公元一世纪初到十四世纪初）

从《九章算术》问世以来，我国的数学便进入了“九章”时代。直到十四世纪初的一千三百年中，《九章算术》始终是传播数学知识的主要课本，同时许多数学著作以“九章”的方式（即按问题的解法分类）编排，且书名也常冠以“九章”之类的字样。我国的数学在此时期有了极大的发展，形成了高峰。

第一节　赵君卿、刘徽等人的数学成就

《九章算术》和其它事物一样，不可避免会存在一些问题，例如书中只有解题方法，而没有理论证明；还有些结果比较粗疏，等等。这些问题，在后来的应用中逐渐暴露出来，这也推动了理论研究。本节将以数学家刘徽为中心论述东汉到三国末的数学研究和成就。

对《九章算术》的检验与赵君卿的《周髀算经》注

1．早期对《九章算术》的检验。东汉时期我国的经济、文化又有了进一步的发展。当时疏浚和兴修了许多水利工程，出现了不少新的铁制农具，并且中原的许多先进生产技术推广到南方或边远地区，农业生产达到了较高的水平。东汉初年，发明水力鼓风炉——水排，煤和石油已被利用，出现了真正的瓷器，纺织技术等都有重要发明，手工业有很大进步。经济的发展给科学的进步提供了物质基础，天文学、地震学、医药学等等都取得了重要成就。

在这种情况下，东汉统治者对于度量衡的管理有所加强，度量衡器具和计算要有统一标准，《九章算术》就被列为核校度量衡的数学依据。在东汉光和二年（公元 179 年）一块铜版上的铭文中规定："大司农以戊寅（公元138年?）诏书，以秋分之日，同度量、均衡石、桷[①]斗桶、正权概，特更为诸州作铜斗、斛、称，依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，以齐七政，令海内都同。光和二年闰月廿三日。大司农曹棱亚、淳于宫，右仓曹椽朱音、史韩鸿造。"[②]就是说，凡是度量衡研制中涉及到的数学问题都要依据《九章算术》的算法进行计算，实际上等于把《九章算术》宣布为官书，它当时在社会上的影响就可想而知了。

---

① 桷音决 jué，方形的椽子。

② 《匋斋馆金石记》卷五。

东汉、三国时期已经有许多人学习和研究《九章算术》，它在当时几乎是唯一的数学著作。据历史记载，当时著名学者马续"善《九章算术》"，郑玄兼通《九章算术》，徐岳"素习《九章》"，三国时陈炽等都是《九章算术》的研究者。因此当时精通《九章算术》的人是不少的。

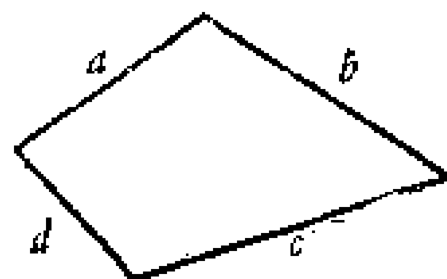
许多人运用《九章算术》中的数学知识去解决实际问题。他们首先是把正负数加减运算法则应用于天文历法。东汉元和二年（公元85年），由政府主编的《四分历》中，计算太阳的视位置度数就用到了正负数。法则是："强正弱负也。其强弱相减，同名相去；异名从之。从强进少为弱，从弱退少为强。"① 这里所讲的是正负分数的减法运算，"同名相去；异名从之"相当于《九章算术》的"同名相除；异名相益"。"弱"为负数，"强"为正数。用式子表示就是：设 $a>b>0$，则 $b-a$ 为负数，就是"从强进少为弱"；设 $a<b<0$，则 $b-a$ 为正数，就是"从弱退少为强"。

几十年后，著名天文学家刘洪在实测基础上制《乾象历》，其中用到正负分数的加减法。他的叙述是："强正弱负；强弱相并，同名相从，异名相消；其相减也，同名相减，异名相从。无对互之。"② 其中"无对"和《九章算术》中的"无入"是一个意思。

在社会实践中，对《九章算术》中没有提到的问题也有了补充。比如在《九章算术》中没有任意凸四边形的面积算法。

① 《续汉书·律历志》。
② 《晋书·律历志》。

但是在东汉建初六年（公元81年）的一份"买地玉券"上有这样的记载："田南广九十四步，西长六十八步，北广六十五（步），东长七十九步，为田廿三亩奇百六十四步。"①但没有讲到算法，后来《夏侯阳算经》中有"四不等田"面积算法是"并二长半之，又并二广半之，相乘为积步"。（图2—1）就是



2—1 "四不等田"

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}$$

如果把"西长六十八步"校为"西长六十四步"，用上面的计算为

$$\frac{94+65}{2}\times\frac{64+79}{2}=5684.25\ (步)$$

当时一亩等于二百四十（平方）步，因而

$$\frac{5684.25}{240}=23\frac{164.25}{240}$$

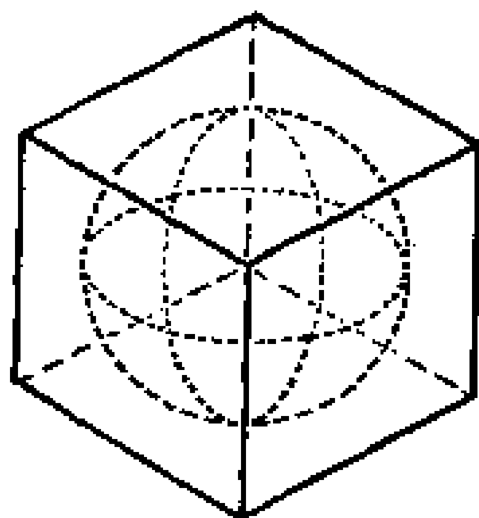
与记载几乎完全一致。以此推之，可知在东汉早期已经建立了凸四边形面积的近似公式。这个公式，对于越接近矩形的凸四边形精确性越高。

《九章算术》中的球体体积公式，大科学家张衡（公元78—139年）已经发现它不精确，并且进行了研究。他设想把球装到一个立方体内并使它们正好相切（图2—2）。他经过推算，得出立方体体积与球的体积之比等于8:5这个结论。这比原来的误差更大，因此没有得到更好的公式。但是他的研究方

① 罗振玉：《楚雨楼丛书》第八种《蒿里遗珍》。

法，却给后人以有益的启发。

张衡在天文学研究中还用到了其它数学知识，比如“重差钩股”，“勾股”是勾股定理，而“重差”则是相似比例在测量上的应用，后来才有明确的解释。他在计算周天和地广时得到圆周与直径之比为92∶29，这就是圆周率的近似值。此外，他还得到相当于$\pi=\sqrt{10}$的结果。



2—2　立方体及其内切球

东汉末年著名学者蔡邕（公元133—192年）认为圆周率应大于$\frac{25}{8}(=3.125)$，三国时王蕃（公元228—266年）则认为“周百四十二，径四十五”，即相当于$\pi\approx\frac{142}{45}$。

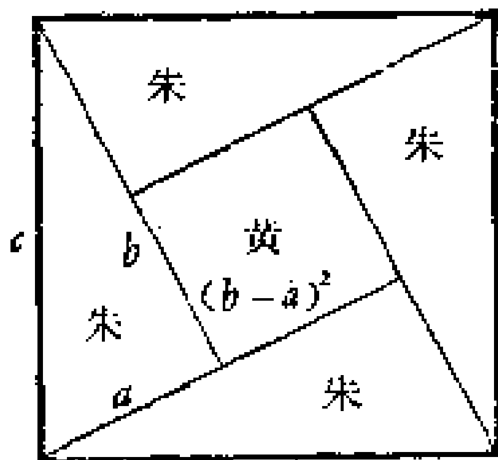
《九章算术》用3作π值，而张衡、蔡邕、王蕃等人得出的结果都是对《九章算术》不精确的圆周率值的改进。

《九章算术》以后，对数学第一个进行理论研究的是赵君卿。

2．赵君卿及《周髀算经》注。赵君卿本名爽，生平不详，可能是东汉末至三国时代人。他研究过张衡的天文数学著作《灵宪》和刘洪的《乾象历》，也提到过“算术”（大概是指的《九章算术》），尤其是他深入研究了《周髀算经》，为此书写了序言，并作了详细注解。

赵君卿承认数学起源于社会实践，接受了前人关于“月不发光”说的正确结论。他认为人与天体的距离虽然很远，不能直接测量，但可以用“晷仪验其短长”，就是用仪器间接地测出。

赵君卿在数学方面的成就，主要是写了《勾股圆方图》。这是我国数学史上极有价值的文献，它作为《周髀算经》的注文而保存在该书的注中。全文只有五百三十余字，但却包含了很重要的内容，特别是在我国第一次明确给出了勾股定理的理论证明。他在叙述了定理的内容之后，又写道："案：弦图（图2--3）又可以勾股相乘为朱实二，倍之，为朱实四，以勾、股之差自相乘为中黄实，加差实亦成弦实。"其中所谓"实"，就是面积。意思是说"弦图"的构成，是把直角三角形的两个直角边相乘得到一矩形的面积（正好是两个直角三角形的面积），涂上红色（朱），再二倍，就变成四个相等的三角形，都涂上红色，象插图那样排列起来。中间是以勾、股之差为边的正方形的面积，涂上黄色。这样正好构成一个以直角三角形的斜边（弦）为边的正方形面积。如以a、b、c分别表示勾、股、弦之长，则有



2—3 "弦图"

$$2ab+(b-a)^2=c^2$$

经整理即得 $a^2+b^2=c^2$

这种证法简单明了，现在仍被采用。在国外，也有类似的证明方法。印度数学家巴斯卡拉（Bhaskara，1114—1185年?）和中亚数学家阿部尔·瓦发① （于十世纪后半期）都曾先后用

① Физико~Математические науки в странах востока, 1966, Издательство «Наука», стр.110—113.

过，但都在赵君卿之后。

赵君卿证法的基本思想就是图形经“移补凑合”，而面积不变。这种方法在我国后来有很多人运用，发展为“演段术”。

勾、股、弦及其和差，在正数范围内仅有九种，即假定$a<b<c$，则有$a,b,c,a+b,b-a,c+b,c-b,c+a$，$c-a$。若已知其中任意两种，则可求出其余。这样，勾、股、弦及其和差互求问题一共应有$\frac{1}{2}\binom{2}{9}=36$种，赵君卿已解出24种。后来到了元代，把其余的全都求出。

赵君卿在《勾股圆方图》中还研究了二次方程问题，并得出了与“韦达定理”类似的结果。他说：“其倍弦为广袤合，令勾股见者自乘为其实。”设x_1、x_2分别为“广”、“袤”，则“其倍弦为广袤合”，就是$x_1+x_2=2c$（c为弦长），“令勾股见者自乘为其实”，就是$x_1x_2=a^2$（或b^2）。$x_1+x_2=2c$和$x_1x_2=a^2$（或b^2）就是二次方程$x^2-2cx+a^2=0$的二次项系数和常数项。其意义与韦达定理一样①。赵君卿的结果比韦达（F.Viéte，公元1540—1603年）早了一千三百多年。

赵君卿还得到了相当于如下的式子

$$x=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2}$$

显然是上述二次方程的一个根。这是世界上最早的求根公式之一。

赵君卿对分数也有研究，把《九章算术》中的分数运算方法上升到理论高度，创始了“齐同术”。他在计算天文问题

---

① 严敦杰：《中学数学课程中的中算史材料》，1957，人民教育出版社，第7页。

时，以齐同术算乘除法。例如他在《周髀算经》注中写道："通周天四分之一为千四百六十一，通十二月十九分月之七为二百三十五，分母不同，则子不齐，当互乘以齐同之。"就是把周天$365\frac{1}{4}$度化为$\frac{1461}{4}$度，把$12\frac{7}{19}$月化为$\frac{235}{19}$月，每月之度数当为$\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}$。但是这两个分数的"分母不同"，因此必须"互乘以齐同之"，即　$1461\times19=27759$，$235\times4=940$，$4\times19=76$。于是

$$365\frac{1}{4}\div12\frac{7}{19}=\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}=\frac{27759}{76}\div\frac{940}{76}$$
$$=27759\div940=29\frac{499}{940}$$

总之，赵君卿在我国数学史上是一位有贡献的数学家，他的不少数学思想和方法对后来的数学界是有影响的。

数学家刘徽的思想

公元三世纪是我国数学理论发展的重要时期。如果说赵君卿在数学理论方面的工作是一种尝试的话，那么数学家刘徽则是进行深入研究的杰出代表。

1．刘徽的批判精神。刘徽生活在三国时代的魏国，可能是山东人。他曾从事度量衡考校工作，研究过天文历法，还可能进行过野外测量。但是他最主要的工作是数学研究，他反复地学习和研究了《九章算术》。他自己曾说："徽幼习《九章（算术）》，长再详览。"刘徽在研习《九章算术》过程中，发现许多问题不能使人满意，于是一一提出解决办法，取得了卓越

的成就。他对《九章算术》进行了详细注解，写了序言，并作《重差》（后人称《海岛算经》）一卷，这是他留给我们十分珍贵的科学遗产。



刘　徽

（蒋兆和画）

刘徽对分数的看法是："物之数量不可悉全，必以分言之"，即分数来源于客观需要。他对正负数也有类似的看法。

刘徽的批判精神十分可贵，他不迷信权威，也不盲目地踩着前人的脚印走，而是有自己的主见。例如张衡虽在科学上有很大贡献，可是他的认识却有一些不正确的地方，刘徽并没有因为张衡在历史上的地位而附会其错误。在讨论张衡关于球体积的研究时指出："（张）衡说之自然，欲协其阴阳奇耦①之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。"

刘徽尖锐地批评了当时数学上的"踵古"思想。在"方田"章的注文中，他指出圆周率"非周三径一之率也。周三者从其六觚②之环耳"。就是说，周三仅是圆内接正六边形之周长，而不是圆周长。可是很多人还泥守着"周三径一"这个陈腐的概念，不敢超越。刘徽说："学者踵古，习其谬失"。这些

---

① 耦音偶，ǒu，两人在一起耕地叫"耦"，作"双"，"对"解，与"偶"同。
② 觚音孤，gū，古代的酒器，呈八棱或六棱形，又作棱角讲。

“学者”不去认真研究，“莫肯精覈①”，结果是以疏传疏。他在“方程”章中又指出：有些人“拙于精理”，只知按前人的方法，亦步亦趋地去做，不懂得改变解题方法和步骤，有的甚至于达到“或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵”的荒唐地步。刘徽嘲笑这些人对于数学的态度就象“胶柱调瑟”一样，别人拧都拧不动。

2．刘徽的数学思想。刘徽在批判前人错误思想的同时吸收了许多有益的东西，从而形成了自己的一套先进数学思想。在他的《九章算术》注中处处闪烁着先进数学思想的光辉。

刘徽的数学思想，粗略地说可有以下几个方面：

首先，他在数学方面具有朴素的辩证法思想。他主张对于具体问题具体分析，解决数学问题不应拘于一法。例如“均输”章第26题，他认为有两种解法，到底用哪个方法，刘徽认为“可随率宜也”。

其次，刘徽很注意寻求数学内部的一般规律。他在《九章算术》注的序文中说：“事类相推，各有攸归，故条枝虽分而同本榦②者，知发其一端而已。”意思是有许多数学问题，表面上看不相同，但在理论上都是一致的，它们有共同的根源。在整个注解中，都贯穿了这种思想。他在“勾股”章16题注中说：“言虽异矣，及其所以成法，实则同归矣。”

再次，刘徽也很注意转化。这是他的朴素辩证法思想的体现。他用这种思想指导运算中的化简工作，例如对于约分就明确讲述了这一点。刘徽注意到“分之为数，繁则难用”，因此要

① 覈音核，hé，作深刻解，又作考察解，与核通。
② 榦音干，gàn，树木的主体，与枝相对。

约分，而约分的结果数值不变。他说："设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异词，至于为数，亦同归尔。"在"衰分"章中，刘徽还讲了分数的同值变换问题，"一乘一除适足相消，故所分犹存"。

再次，刘徽很注意数学推理的逻辑性。他对《九章算术》中的所有数学概念都作了解释或逻辑定义。他还考虑了各问题之间的逻辑关系，例如他讲"不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥、亭之类，功实之主也"。是一环扣一环的。在"勾股"章中，也明确指出：这一章之所以一开头就提出了勾股定理，是因为"将以施于诸率，故先具此术，以见其源也"。他从逻辑严谨性出发，对于那些能从逻辑上证明的法则都进行了论证。他认为有些问题不能只限于感性认识，必须从理性上加以认识。

刘徽也注意到数学的直观性。他主张"析理以辞，解体用图"。就是理论和直观并用，只有这样，才能更好地使人理解数学内容，达到"庶亦约而能周，通而不黩①，览之者思过半矣"的目的。因此他在数学研究中很注意使用图形、立体模型、剪纸和涂抹颜色。

刘徽也有一些模糊或不正确的认识。例如在数学起源的问题上，刘徽认为"昔在包羲氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术以合六爻之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉"。就是说，在他看来数学是起源于包羲（即伏羲）画八卦的神话传说。又说"按周公制礼而有九数，九数之

① 黩音渎，dú，随便的意思。

流，则九章是矣”。这又把《九章算术》推源到所谓“周公制礼”。这些看法都是没有根据的。然而，对刘徽来说，这些缺点无损于他的光辉成就。

下面依次介绍刘徽在算术、代数、几何和重差术方面的成就。

刘徽在算术方面的贡献

1．十进小数。我国在刘徽以前，计算中遇到奇零小数时，或是化为分数，或是用地位制命名法，或者四舍五入。小数位数少，这样处理固然可以，位数多了，就不方便。刘徽在长度的记法中就用到数名：丈、尺、寸、分、厘、毫、秒、忽，“忽”是最小的，它以下没有专名。刘徽在数学研究中就遇到了需求忽以下的小数，他没有继续命名，而是创造了十进小数（用十进分数形式给出）。

刘徽在《九章算术》注中有三个地方用到了十进小数，现分述于下：

①“方田”章圆田术注：“……七十五（平方）寸，开方除之，下至秒忽。又一退法，求其微数。微数无名者以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。”就是把75开平方，开得八寸六分六厘二秒五忽。可是还有剩余，再开就得出忽以下的小数，刘徽把它们叫做“微数”，不再命名。他把所求到的忽以下的第一个数字4做分子，以10做分母，表示为十进分数$\frac{4}{10}$忽。因此说“约作五分忽之二”，即$\frac{4}{10}$忽$=\frac{2}{5}$忽。这就是以忽为单位，忽以下用十进分数处理。

②“少广”章开方术注：“……凡开积为方，……求其微数，微数无名者，以其为分子，其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细。……”设N为被开方数，其平方根的整数部分为a忽，还有剩余为r（平方忽），即

$$\sqrt{N}=a\text{忽}\cdots\cdots\text{余}\ r$$

继续求“微数”，以a_1为第一个数字，就把它作为分子，以10为分母（“其一退以十为母”）。再求一次又得数字a_2，把a_2做分子，以100(10^2)为分母（“其再退以百为母”）。依此继续求到第n次，如已开尽，就得分数$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$，即开得之小数部分，因而有

$$\sqrt{N}=a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\ (\text{忽})$$

其中a_1、a_2、……a_n都是1、2、……9、0中之某一个。这种记法（刘徽用文字叙述）和现代十进小数本质上完全一样。

③“少广”章开立圆术注：“术亦有以法命分者，不如故幂开方，以微数为母也。”这也是说的十进小数，但不详细。

总之，刘徽在对奇零小数的处理上创用了十进小数记法，这在世界数学史上是一项伟大的成就。外国的同样思想到十四世纪才出现，晚了一千多年。

2．齐同术。赵君卿首先引用了“齐同”这个术语，在应用上还只是零星的，更没有形成完整的理论。这一工作，由刘徽出色地完成了。

①齐同术定义。“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同”，这是对一组分数说的，就是使分母相同，而要对分子所做的相

应变动所下的定义。例如对分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$通分时，《九章算术》用ad和cb做分子，bd做公分母。刘徽的"凡母互乘子谓之齐"就是把ad和cb定义为"齐"；"群母相乘谓之同"就是把bd定义为"同"。这一定义显然适合于多个分数的情形。

刘徽又把他的齐同术定义进一步加以解释，他说："同者，相与通同共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。"意思是说"同"是一群分数的公分母；"齐"是由"同"而来，是为了使每个分数之值不变。例如分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$和$\frac{e}{f}$，按定义以bdf为公分母。若想使每个分数值不变，就必须"子与母齐"。按定义"母互乘子"，得adf、bcf和bde，原来的分数分别变成，$\frac{adf}{bdf}$，$\frac{bcf}{bdf}$和$\frac{bde}{bdf}$，其值都没变。

② "齐"和"同"实际求法。直接根据定义求"齐"、"同"固然可以，但是当分子分母都很大时，计算自然不方便。因此，刘徽提出用诸分数分母的最小公倍数去求"齐"、"同"的方法，即"母除率，率乘子为齐"。"率"就是（诸分母的）最小公倍数。设有分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$和$\frac{e}{f}$，且$m=[b, d, f]$（最小公倍数）。所谓"母除率"就是：$\frac{m}{b}$，$\frac{m}{d}$和$\frac{m}{f}$。"率乘子为齐"，即分别以$a\times\frac{m}{b}$，$c\times\frac{m}{d}$和$e\times\frac{m}{f}$为新分数的分子，以m为公分母，便得分数

$$\frac{a\times\frac{m}{b}}{m},\quad \frac{c\times\frac{m}{d}}{m},\quad \frac{e\times\frac{m}{f}}{m}$$

这就是齐同以后的结果。

③齐同术的推广。刘徽不仅完成了齐同术理论，而且还进行了推广．用以解决其它问题。例如他用齐同术去求几个分数的平均值，解释衰分术，解“均输”、“盈不足”和“方程”等问题。在“衰分”章“返衰”下注称：“母同则子齐，齐即衰也。”设$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$、$\frac{e}{f}$，可通过齐同术判断它们的大小，即通分得公分母bdf，分子分别为adf、bcf和bde，比较分数的大小只比较分子便可。假定$adf>bcf>bde$，则有不等式：

$\frac{adf}{bdf}>\frac{bcf}{bdf}>\frac{bde}{bdf}$，这就是“齐即衰”的意思。

齐同术在外国没有提出过，因此可以说是我国古代算术的一个特色。

3．对算术的其它研究。刘徽在算术方面还作了其它一些研究，并有创见。他认为“一乘一除，适足相消，故所分犹存”，就是一个分数用同一个数（非零）同时乘除，其值不变。刘徽说：“法实俱长，意亦等也”，意思是分子（实）、分母（法）都扩大同一倍数，结果和原来的分数一样。

对于《九章算术》中“更相减损”求最大公约数方法，刘徽也有自己的认识。《九章算术》中没有说明这个方法成立的理由，刘徽则指明了这一点，他说：“其所以减之，皆等数之重叠……”就是所以能“减之”，是因为两数中有“重叠”的“等数”（公约数）的缘故。

化带分数为假分数的实际求法在《九章算术》中早已提出，但是没有说明。刘徽第一次对这个问题进行了解释。他在“方田”章注称：“命母入者，须还出之”。“母入者”就是指形如$m\frac{a}{b}$的带分数，“还出之”就是把它化为$\frac{mb+a}{b}$形的

假分数。分数运算只有先做到这一步，然后才能实际加、减、乘、除。他还研究各种比例算法，统名之曰“今有术”。

刘徽在代数方面的贡献

刘徽在代数方面也做过不少研究，有自己的独到见解。

1．对正负数的认识。如前所述，历法中对正负数已有广泛应用，可是究竟应当怎样认识正负数，却很少有人论及。刘徽在《九章算术》注中第一次深刻阐述了自己的看法。

正负是什么意思呢？刘徽说：“今两算得失相反，要令正负以名之。”“算”在这里是指当时所用的算筹，如果计算时用算筹代表“得”、“失”两种量，那就要用正负数来定义。这个观点是正确的。

用筹进行代数运算时如何区别正负数，以前不见记载。刘徽提出两种方法，就是“正算赤，负算黑。否则以邪正为异”。是说用红、黑两种颜色的算筹区别正负；如果不这样，在用同一种颜色的筹计算时可以在摆法上以“正”、“邪”（斜）区别正负数。这两种方法，对后来的数学都有深远影响。

刘徽还认为：“言负者未必负于少，言正者未必正于多”，这是说正负数的绝对值。前一句话是指负数的绝对值未必小；后一句话指正数的绝对值也不一定很大。在计算中，筹的总数不变，即筹的个数不变，因此他接着说：“虽复赤黑异算，无伤。”

2．改进解线性方程组“直除法”。刘徽对方程组有深刻认识，明确提出当时所说的“方程”应当“令每行为率，二物

者再程，三物者三程，皆如物数程之”，即有几个未知数列几个方程。这个问题到近代才清楚。对于方程组解法的研究，他的贡献很大。《九章算术》中用“直除法”解线性方程组，思路正确，但是麻烦一些。改进直除法比较容易。只要将对应项系数互乘、对减一次即可消去一项。可是长期没人注意到这点。刘徽在“方程”章第七题的注中，第一次用到这个方法。原题是：“今有牛五、羊二，直（值）金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？”用现代表示法就是：设 x 、y 分别代表牛、羊每只值金数，则有

$$\begin{cases} 5x+2y=10 & (1) \\ 2x+5y=8 & (2) \end{cases}$$

《九章算术》没有给出解法步骤，只是说“如方程”而已。刘徽在注解中提出互乘对减法。他说：“假令为同齐，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行，牛十、羊四，直金二十两；左行，牛十、羊二十五，直金四十两。”这就是以 $2\times(1)$，$5\times(2)$，得

$$\begin{cases} 10x+4y=20 & (3) \\ 10x+25y=40 & (4) \end{cases}$$

此时“牛数等同，金多二十两者，羊差二十一，使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也”。就是（4）－（3）有

$$21y=20$$

由此可求出每只羊值金数 $y=\frac{20}{21}$。刘徽认为这是显而易见的，没有继续计算。这个解法步骤和现代的加减消元法本质上完全一样。虽然刘徽仅在此处用了一次这个方法，但是他认为可以推广。他说：“以小推大，虽四、五行不异也。”就是说他的

方法适用于四元、五元方程组的情形。

3．建立方程新术。《九章算术》"方程"章最后一题是："今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五。问一斗直几何？"这相当于下面的五元线性方程组。

$$\begin{cases} 9x+7y+3z+2u+5v=140 & (1) \\ 7x+6y+4z+5u+3v=128 & (2) \\ 3x+5y+7z+6u+4v=116 & (3) \\ 2x+5y+3z+9u+4v=112 & (4) \\ x+3y+2z+8u+5v=95 & (5) \end{cases}$$

这个问题，不论用直除法或互乘对减法求解，都较复杂，就象刘徽所说的"用算而布毡"那样麻烦。因此他写了一篇叫《方程新术》的论文，附于"方程"之末。他在这篇文章中提出了三种解法。

第一种解法：中心思想是消去常数项，再把每行（方程）的项数减到只剩两项，然后就用比例表出。这时只要求出一个未知数的解，其余可立即求出来。刘徽对此有一段精采的叙述："令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。……"他用此法求得两两"相当之率"，即

$$4x=7y$$

$$3y=4z$$
$$5z=3u$$
$$6u=5v$$

由此得$\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{u}{5}=\frac{v}{6}$。

其次，刘徽由（3）－（4）得

$$x+4z-3u=4 \qquad (6)$$

再据$\frac{x}{7}=\frac{z}{3}$有$z=\frac{3x}{7}$，据$\frac{x}{7}=\frac{u}{5}$有$u=\frac{5x}{7}$，代入（6），有$7x+12x-15x=28$，故得$x=7$。这样，其余都可求出。

第二种解法：中心思想是由各式连续减（6），消去首项。因为（6）式首项系数是1，可以不必互乘，避免麻烦。用此法，先求出$u=6$，再依次求出其余。

第三种解法：中心思想是通过连比例这一环节来解决的，就是"置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各依其率乘之，并以为法。……以减行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得。""群物通率"就是由第一法之比例有

$$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6$$

再通过（6）式（即"减行"）即可求得解答。

这三种解法之间有紧密联系，互相利用现成结果，提供了方便条件。刘徽通过自己的钻研，取得这样的成绩，值得称道。

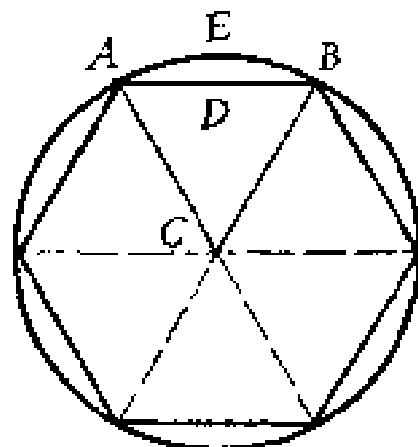
刘徽还研究过等差级数，并且得出求和公式。

刘徽在几何方面的贡献

刘徽在几何方面做过许多工作，取得不少重要成就，归结

起来主要有以下几个方面：

1．割圆术。刘徽发现前人泥守的"周三径一"之率，仅是圆内接正六边形的周长和圆径之比（图2—4），而非圆周长与圆径之比，以3为π值是极不精确的。因此他提出了科学的方法——割圆术，求出更好的圆周率值。他为计算方便起见，"置圆径二尺，半之为一尺，即圆里六觚之面也"。就是以一尺为半径作圆，再作圆内接正六边形，然后逐渐倍增边数，计算出正十二边形、正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形和正一百九十二边形的面积。后两多边形的面积，刘徽求得各为 $S_{96}=313\frac{584}{625}$（平方寸）和 $S_{192}=314\frac{64}{625}$（平方寸），设 S 为圆面积，于是有



2—4　刘徽割圆图

$$S_{192}<S<S_{192}+(S_{192}-S_{96}),$$

即
$$314\frac{64}{625}<S<314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}。$$

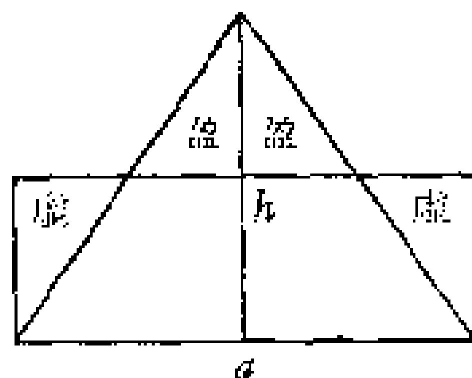
刘徽在这里舍弃分数部分，把314取作圆内接正192边形之面积。因为已经假定圆半径为1尺，故得 $\pi=3.14$。刘徽又用几何方法把它化为$\frac{157}{50}$。后人把3.14或$\frac{157}{50}$叫做"徽率"。

刘徽认为还可以继续求下去，不过实际上他没有再求。割圆术的出现，在世界数学史上虽晚于希腊的阿基米德，但在我国数学史上却是十分重要的。

2．几何定理的证明。刘徽用几何方法比较严密地证明了不少几何定理，其中包括平面几何和立体几何定理。他证明的

主导思想是凡能用“以盈补虚”的，不论平面问题还是立体问题，都用这种方法把未知转成已知。对于另外的定理，他则提出新的解决方法。

在平面几何定理的证明中，有关于“勾股容圆”等，有两条面积的计算法则，有一条是勾股定理。对勾股定理的证明只是说“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补各从其类，因就其余不动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也”。具体证法可能与欧几里得（Euclid）《几何原本》卷一第47题相似。关于面积的两条，一条是三角形面积定理，一条是梯形面积定理。证明都是用“以盈补虚”。我们以前者为例来说明，刘徽说：“半广者，以盈补虚为直田也。”这就是把三角形的高 h 二等分，补成一个长方形（图2—5），其面积为 $\frac{1}{2}ah$，正好是原三角形的面积。

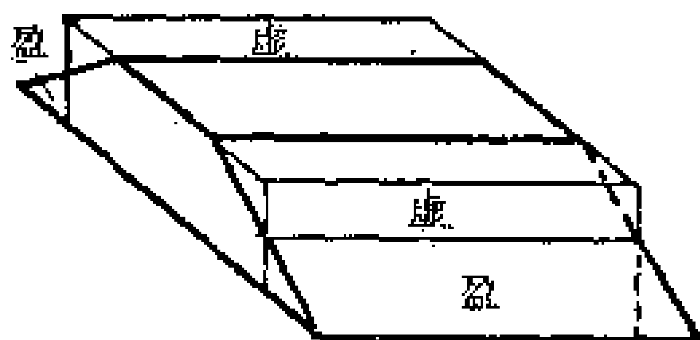


2—5　“以盈补虚”（平面）

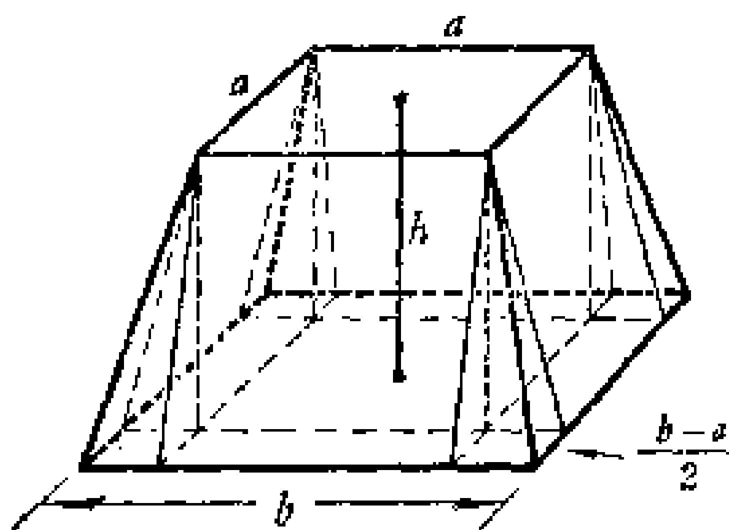
关于立体几何定理，刘徽证明得较多。大体上可以分为两类：一类是多面体体积的计算法则，他也用“以盈补虚”的方法去证明；一类是圆锥和圆台的体积计算法则，他转化为某种相应的多面体，中间通过他首先发现的一条重要原理去解决。

刘徽对楔形平截体的体积计算法则给了证明。就是“并上、下广(a,b)而半之者，以盈补虚，得中平之数，以高(h)若深乘之，……得一头之立幂”，就是把平截体的侧面梯形变换成等积的长方形(图2—6)，其面积为 $\frac{a+b}{2}\times h$。然后“又以袤(c)乘之者，得立实之积(v)”，即得公式

$$V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$$



2—6　“以盈补虚”（立体）



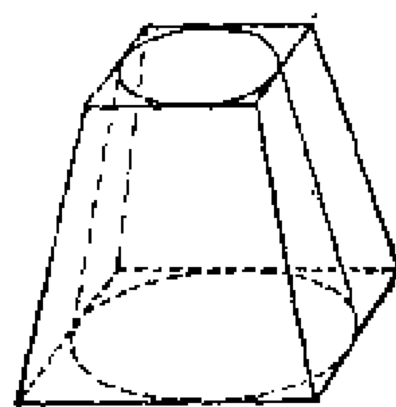
2—7　正方台分解

对于正方台体积的计算法则的证明，刘徽把它分解成一个正方柱、四个相等的底为长方形的直角楔形（壍堵）和四个相等的四棱锥（阳马）（图2—7）。这些立体的体积都能求出，最后加起来就得到公式

$$V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$$

或者是把正方台补充成三个相等长方体，也可得出上面的结果。

在证明圆锥和圆台的体积计算法则时，刘徽在其外作一外切正方锥或正方台。这时他注意到用平行于底的平面去截（图2—8），所得之截口圆与外切正方形的面积之比恒为 $\pi:4$。于是他发现它们的体积之比也应是 $\pi:4$，即


2—8　圆台及其外切正方台

$$V:V'=\pi:4$$

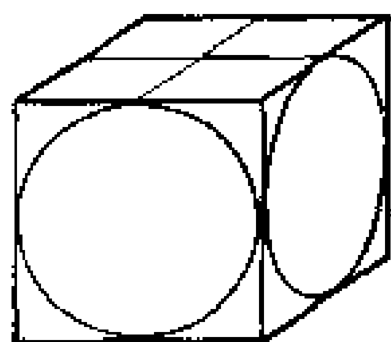
其中 V、V' 分别为圆台（锥）及其外切正方台（锥）体积。因为 V' 可以求得，所以由上式可得

$$V=\frac{\pi}{4}V'$$

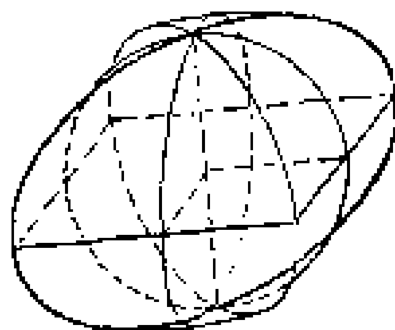
对于等高的阳马和鳖臑两种立体，刘徽也进行了类似研究。他认为用平面去平截一个立方体分解出来的两种立体时，如果截面的面积之比为2:1，那么它们的体积之比也是2:1。①

刘徽在这里用到了一条重要原理：如果两个等高的立体，用平行于底的平面截得的平面面积之比为一定值，那么这两个立体的体积之比也等于该定值。这个原理可以称之为“刘徽原理”，它可以用现代积分学进行证明。

3. 关于球体体积的研究。刘徽和张衡一样也注意到《九章算术》中关于“立圆”（球）的研究，并且对张衡的研究也进行了探讨，纠正了他的错误。在这个基础上，他着手解决球体体积的准确计算，并试图通过上述的原理把球的体积计算转换到另外一个能计算体积的立体上去。为此他作球的外切立方体，同时用两个直径等于球径的圆柱从立方体内切贯穿（图2—9），这时球就被包含在两圆柱相交的公共部分中，而且与圆



2—9　两圆柱贯穿立方体



2—10　“牟合方盖”

柱相切。刘徽只保留两圆柱的公交部分，给它取名为“牟合方

① 李俨：《中国数学大纲》（修订本）上册，1958年，科学出版社，第53—54页。

盖”①（图2—10）。球和“牟合方盖”用水平截面去截，其面积之比就恒为$\pi:4$，于是他用上述原理立即得到：

$$V_{球}:V_{牟}=\pi:4$$

或 $$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟}$$

如果“牟合方盖”的体积能够计算出来，那么整个问题就解决了。刘徽力图求出$V_{牟}$，然而没有达到目的，最后，他感慨地说：“观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆纠缠，浓纤诡互，不可正等。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。”就是说问题复杂，找不到解法，只好留给后人解决。

刘徽虽然没有把球体的体积计算问题加以解决，但是他的思路正确，且为后人解决这个问题打下基础。

4．极限观念。早在春秋战国时代虽已有了初步的极限观念，可是长期没有得到进展，《九章算术》等书中根本没有涉及到这类问题。刘徽在不少数学问题的处理上，最终都引到极限观念上来。

刘徽在割圆术中叙述了极限观念。他用倍增圆内接正六边形的边数，以正3×2^n边形当$n\to\infty$时面积的极限来定义圆的面积。他说：“又按为图②，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥（越）细，所失弥少。割

---

① 丹麦的瓦格纳(D.B. Wagner)曾对“牟合方盖”有一种很有意思的解释，他认为在我国湖南马王堆出土的一个漆盒就是这种东西。见D. B. Wagner, Lui Hui and Tsu Ken—Chih on the Volume of a Sphere, Chinese Science, 3(1978), pp.59—79。

② 原图已经失传。

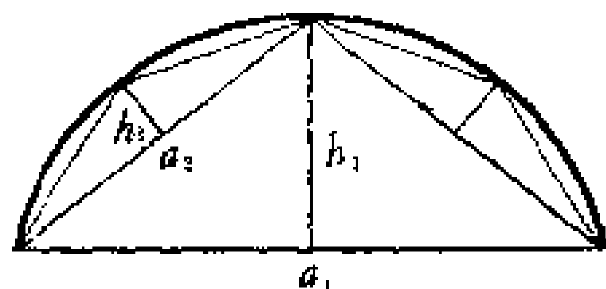
之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”就是：设 S 为圆面积，$S_{3\times 2^n}^n$ 为圆内接正 3×2^n 边形的面积，则刘徽的思想与

$$S=\lim_{n\to\infty} S_{3\times 2^n}$$

（n 从 1 开始）相近。

刘徽发现：《九章算术》中关于弓形面积的计算方法不够精确，特别是当弓形的高越大时旧法的误差也越大，于是把割圆术用到弓形上，以极限观念定义了弓形面积。

他以弓形的底 a_1 和高 h_1 在形内作内接等腰三角形，求出其面积 $\triangle_1=\frac{1}{2}a_1h_1$。再以此三角形的两腰为底作小弓形内接等腰三角形，每一个小弓形的面积 $\triangle_2=\frac{1}{2}a_2h_2$。因两小弓形的面积相等，故有 $2\triangle_2=a_2h_2$（图2—11）。如此类推下去，到第 n 次就有 $2^{n-1}\triangle_n=2^{n-2}a_nh_n$。把这些三角形的面积加起来，设 S_n 为其和，则



2—11　弓形割圆术

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\triangle_i=\sum_{i=1}^{n}2^{i-2}a_ih_i$$

把上式取极限，并设 S 为弓形面积，就有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{i-2}\triangle_i$$

这可以解释刘徽所说的“割之又割，使至极细，但举弦矢相乘之数，则必近密率矣”一语的意思。

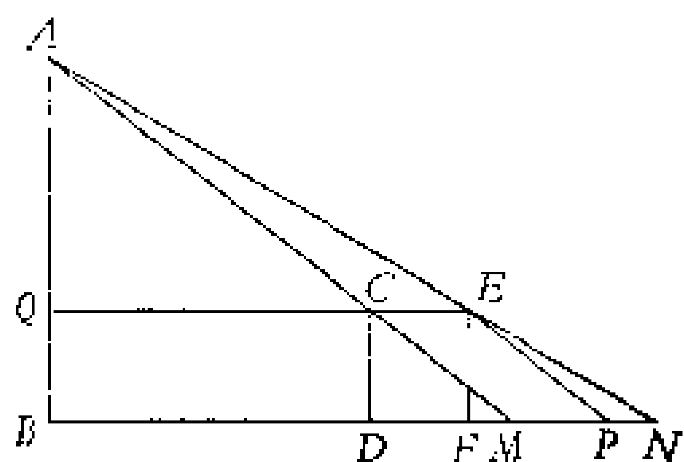
刘徽在体积研究和开方中也都用到了极限观念。例如在棱锥的研究中，他把立方体进行分解，以求棱锥的体积，“若为数以穷之。置余高、袤、广之数各半之，则四分之三又可知

也。半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉？”就是逐次分割棱锥体，并求出它们的体积，分割到无穷次，问题就解决了。

总括以上数点，刘徽在数学中多次用极限方法处理问题，而且运用比较熟练，说明他已经对极限有了相当的认识。这是刘徽在数学上极其重要的成就，充分反映出他数学思想的先进。

刘徽的重差术

“重差”是我国古代数学在测量上的一种重要应用，在《周髀算经》中已有类似问题。后来张衡在《灵宪》中曾提到“重差钩股”，用于天体测量。刘徽在前人工作的基础上，对重差术继续研究，可能还应用过，并作了一些总结。在他注《九章算术》所写的序中对重差术的意义、方法和他研究的大概经过有一段较详细的记述。他说：“凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也。”这是说重差术是用于测量那些不可到达的远距离，“以重差为率”指的是用两次差并通过“率”，即比例相似进行计算。



2—12 重差测日

刘徽还在同一序中举一实例说明重差术的内容：“立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘间为

实，实如法而一，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。”设A为太阳，B为“日下”，在地平面上南北两点D、F立两个竿（等高）DC、FE。A、C连线与地平面交于点M，A、E连线与地平面交于点N。过点E作AM的平行线EP，C、E连线与AB交于点Q。PN为景差，即$FN-DM$（图2—12）。因为$\triangle ACE\backsim\triangle EPN$，$\triangle AQC\backsim\triangle EFP$，故有

$$AQ=\frac{CD\times DF}{FN-DM},\quad BD=\frac{CD\times FN}{FN-DM}$$

而“日去地”的高为AB，即$AQ+QB$，故前式改为$AB=\frac{CD\times DF}{FN-DM}+QB(CD)$。这里两次用到差$FN-DM$，故曰“重差”。在古代把大地看做平面的情况下，这种算法是对的。特别是重差术在小范围的地面上使用，有很大的实际价值。

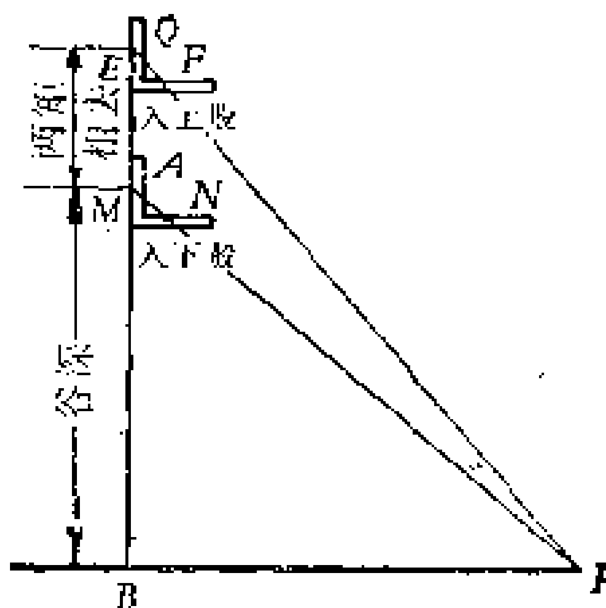
刘徽通过自己的实践，看到了重差术的用途，于是进行了研究、整理，“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望”。他的《重差》一卷九个问题，附在《九章算术》之末。到唐代人们又把它拿出来（改为单行本），以第一问测海岛高远而称为《海岛算经》。

《重差》九个问题包括了刘徽自己所说的“重表”、“累矩”、“三望”、“四望”方面的内容。其解法形式有三种，即重表法（立两个等高的竿）、累矩法（用两个矩代替“表”）和绳表法（用绳和“表”），本质上没有区别。前面所讲的计算太阳高远问题，是重表法，不再重举。下面列举另外两法的例子。

累矩法的例子（《重差》第四题）：“今有望深谷，偃矩

岸上，令句高六尺，从句端望谷底，入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈，更从句端望谷底，入上股八尺五寸，问谷深几何？”

刘徽的解法是：“置矩间以上股乘之为实，上下股相减，余为法除之。所得以句高减之，即得谷深。”如图2—13，AQ 为矩间（即两矩相去），EF 为“上股”，MN 为“下股”，AM(QE)为句高，MB为谷深。根据刘徽的解法有



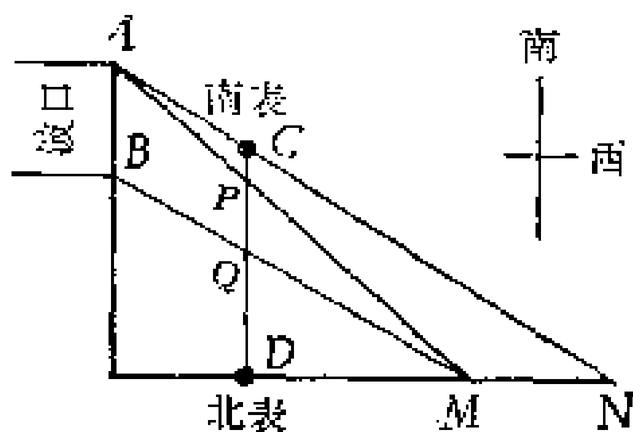
2—13《重差》第四题示意图

$$MB = \frac{AQ \times EF}{MN - EF} - AM$$

将已给数字代入有 $MB = 419$尺，即所得答案。

绳表法的例子（《重差》第六题）：“今有东南望波口，立两表，南北相去九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表六丈，薄地遥望波口南岸入索北端四丈二寸。以望北岸，入前所望表里一丈二尺。又却后行去表十三丈五尺，薄地遥望波口南岸，与南表参合。问波口广几何？”

刘徽的解法是（图2—14）：“以后去表（DM）乘入索（PD），以表相去（CD）而一。所得，以前去表（DM）减之，余以为法。复以前去表（DM）减后去表（DN），余以乘入所望表里（PQ）为实，实如法而



2—14《重差》第六题示意图

一，得波口广（AB）。" 就是下式

$$AB=\frac{PQ\times(DN-DM)}{\frac{DP\times DN}{CD}-DM}$$

题中所说的"索"就是绳子，"薄地"就是拉绳与地面相接，图中 C、D间（即两表间）便是拉绳所成之直线。这个问题是属于"三望"的一类。

如果把重差术用三角去解，所得结果一致。由此可见，我国的重差术和西方的平面三角起着同样的作用，这也是我国数学的一个特色。

第二节 数学理论研究的继续发展

由晋初到南北朝（即由公元三世纪后期到六世纪后期）的三百年间，虽然多处于分裂状态，但是数学仍有一些发展。这一时期完成了不少数学新著，出现了象祖冲之这样杰出的数学家，数学在天文历法、度量衡研究和其它方面得到广泛应用，在理论上主要是沿刘徽的道路前进的。

《元嘉历》中的数学

1. **《元嘉历》与作者何承天**。两晋南北朝所撰历法，包括改名、改编的在内总共有25种之多。其中最有名的要数《元嘉历》和《大明历》。

何承天（公元370—447年），东海郯[①]（今山东郯城北）人，生活于东晋与南北朝期间。他在南朝刘宋初为太子率更令（官名），为当时著名的天文学家。何承天于元嘉二十年（公元443年）完成《元嘉历》，送到刘宋朝廷，并于二十二年（公元 445 年）开始在南朝施行。他有许多先进的认识，对于汉代历法研究中掺入所谓“谶纬”[②]思想，表示反对。他认为把“谶纬”作为“建历之本”非常荒谬，“此之为弊，亦已甚矣”[③]。何承天特别称赞晋朝杜预（公元222—284年）的一句名言，就是研究历法应当是“顺天以求合，非为合以验天”，意思是要根据天体运行的实际找出其规律性来制订历法，而不能反过来。历法应根据实测，而且要“随时迁革，以取其合”[④]。因此他编出来的《元嘉历》有较高的水平。在这部历法中使用了不少先进的数学工具。

2．一种分数近似方法。设分数$\frac{x}{y}$是所要求的，使它逐渐接近实测数据，而$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$为已知的两个分数，且$\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d}$。怎样解决这个数学问题呢？何承天在调整“日法”的时候，创造了一种算法。“日法”就是历法计算中单位日以下的奇零分数的分母，例如古代《太初历》的“日法”是81，一个月的日数是$29\frac{43}{81}$日。但是如何确定较好的“日法”就是一个问题。何承天以“四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率”[⑤]

① 郯音淡，tán。
② 谶音趁，chèn，“谶纬”是指一种迷信的人认为以后要应验的预言。
③ 何承天：《何衡阳集》“历议”条。
④ 何承天：《何衡阳集》“上新历法表”条。
⑤ 《宋史》卷七十四《明天历》。

进行调整。所谓“强率”与“弱率”就是过剩和不足近似值，然后“于强弱之际，以求日法”。把$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$的分子分母分别相加得分数$\frac{a+c}{b+d}$，仍为弱率，于是再调，有$\frac{a+2c}{b+2d}$。何承天就这样调了15次，得$\frac{9+15\times 26}{17+15\times 49}=\frac{399}{752}$①，把752定为日法。这样求得的$\frac{399}{752}$确实比$\frac{26}{49}$和$\frac{9}{17}$都要好。不过还不是准确值，如需要更好的数值还可以继续往下调，多算几次，就接近测定值。

何承天的近似算法是数学上的一种创造。外国一直到十四世纪才出现类似的算法，晚了八九百年。这种算法可以称为“何承天算法”。

3．圆周率。何承天对圆周率也有研究，他在计算周天度数和“南北相去”时用到了与$\frac{22}{7}$相近的圆周率值。“周天三百六十五度三百四分之七十五。天常西转，一日一夜，过周一度，南北两极，相去一百一十六度三百四分之六十五强，即天经也。”②由此知道，

$$\pi=\frac{365\frac{75}{304}}{116\frac{65}{304}}=\frac{365\times 304+75}{116\times 304+65}=3.1428\cdots$$

这个计算的第二步相当于何承天算法。其中$\frac{365}{116}$相当于π的过剩近似值（3.155…），$\frac{75}{65}$相当于不足近似值。因二者相差很大，故调整304次才得到上述结果。何承天在这个计算中可能不是有意识地用上述算法，而是在计算过程中发现304有特殊

① 钱宝琮：《中国算学史》上卷，1932。
② 《隋书·天文志》。

的意义，它是调整的次数。估计这使他想到这可以成为一种近似值的计算方法，于是总结为“何承天算法”。

祖冲之在数学方面的贡献

1．祖冲之的主要事迹。祖冲之（公元429—500年），字文远，范阳遒①（今河北省涞水县北）人，生活于南朝的宋齐之间。他青年时代在刘宋政府的华林学省从事研究工作，后来到南徐州（今安徽南部、江苏北部地区，行政中心在今镇江市）做从事史，不久又回来担任公府参军。这期间行政事务虽然很多，可是他仍利用一切工余时间从事天文历法和数学研究。



祖冲之

祖冲之的研究工作踏实认真，努力发掘前人的研究成果，他曾说：我“搜练古今，博采沈奥。唐篇夏典，莫不揆量。周正汉朔，咸加该验。罄策筹之思，究疏密之辨”②。对前代的历法书都进行分析比较，同时还进行了实测，对八尺高标杆的日影长度观测持续长达十年之久。在此基础上，于宋大明六年（公元463年）完成了《大明历》。

---

① 遒音求，qiú。
② 《宋书·律历志下》。

祖冲之，后来出任娄县令（娄县在今江苏昆山县东北），到齐灭刘宋之后他又到齐政府担任谒者仆射（是一种掌管朝廷宴会等的礼节官）。在此期间，他对机械的研究非常感兴趣，先后制造了指南车、千里船、水碓磨、欹器①、刻漏，还有一种很好的运输器械，其中千里船和水碓磨都是生产工具。他还对古代的许多典籍进行了研究，并作了注解，他又是乐律家，并精于棋艺。他晚年担任南朝首都建康（今南京市）的长水校尉，向朝廷提出《安边论》，主张"开屯田，广农殖"，兴建大业，巡行四方。实际上，都不可能办到，不久他与世长辞。

祖冲之最大的成就是在数学方面。他研究过《九章算术》和刘徽的注解，同时给《九章算术》和刘徽的《重差》作过注，并自著《缀术》一书。可惜这些重要的文献都已失传，是科学史上的一个重大损失。现在只能从其它著作中找到一些有关祖冲之数学成就的记载。

2．在圆周率方面的伟大贡献。祖冲之和刘徽一样，也考校过度量衡。祖冲之在同别人辩论时，曾经指出："汉时斛铭，刘歆诡谬其数"是"算氏之剧疵"。这是指王莽执政时刘歆研究度量衡过程中所使用的圆周率是不精确的。祖冲之在刘徽的基础上继续研究圆周率，经反复计算，求出新值。再用新值考校刘歆斛斗，结果是"此斛当径一尺四寸三分六厘一毫九秒二忽，庣旁一分九毫有奇"。以此与刘歆结果相比较，发现："刘歆庣旁少一厘四毫有奇，歆数术不精之所致也。"②

---

① 欹器，欹音衣 yī，是倾倒的意思。欹器是一种自警之器，将其吊起来，口朝上，往器里注水将满时它便自动翻倒将水泼出，以此警告自己不要自满。

② 《隋书·律历志上》。

这说明祖冲之由于研究度量衡的需要，才去研究圆周率。

祖冲之在圆周率方面取得很大成就，《隋书》上记载了如下的材料：

"……右之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒[①]数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，周二十二。……"[②]这是一段非常重要的记载，包括以下一些内容：

$3.1415926<\pi<3.1415927$

密率：$\frac{355}{113}$

约率：$\frac{22}{7}$

祖冲之用"盈朒二限"来限定一个尚未完全知道的数值的范围是一种创见。但更主要的还是圆周率值。盈朒二限的平均值3.14159265，已经准确到小数第8位，是当时世界上最好的结果。

"密率"$\frac{355}{113}$更是数学史上的卓越成就。在外国一直到十六世纪才由德国的渥脱(Otto)等重新求得，比祖冲之晚了一千多年。因此，已故日本数学史家三上义夫曾建议把$\frac{355}{113}$叫做"祖率"，以纪念祖冲之的贡献。

因为祖冲之的数学著作《缀术》已经失传，而《隋书》又只记载结论而没写求法，所以祖冲之是怎样求得这样好的圆周

① 朒音 nü，亏缺或不足的意思。
② 《隋书·律历志上》

率值，长期以来成为数学史上的一个谜，直到现在也没有解决。近几十年来，提出了不少推测，特别是求得密率的方法问题更是人们注意的中心。钱宝琮① 主张是用何承天算法求得。是以$\frac{22}{7}$和$\frac{157}{50}$为强弱二率，进行调整，而求得密率。华罗庚② 则主张是用渐近分数求得。笔者认为可能是继续使用刘徽的割圆术，并且把它发展为从圆内接正六边形和外切正六边形周长同时起算，算到内外各为正24576($=2^{13}\cdot 3$)边形时，周长各得3.14159261和3.14159270208，π在它们之间。经四舍五入仍可有

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

在这一计算过程中，会得到一系列圆周率值。把其中的一些化成了分数形式，而$\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$都便于记忆就有意地保留下来，并分别取名“约率”和“密率”③。当然，这也是一种推测，不能据为定论。这样精密的结果决不会凭经验获得，一定是经过理论的计算得到的。

祖冲之的圆周率后来得到应用，例如后周保定元年（公元561年）曾用祖冲之圆周率值计算玉升的容积：“（玉斗）内径七寸一分，深二寸八分……今若以数计之，玉升积玉尺一百一十寸八分有，斛积一千一百八寸五分七厘三毫九秒。”④由圆柱体积反求其所用之圆周率值为3.141592938，这与“密率”的前九位3.14159292相近。

3．球体积的计算。祖冲之研究了《九章算术》中误差很

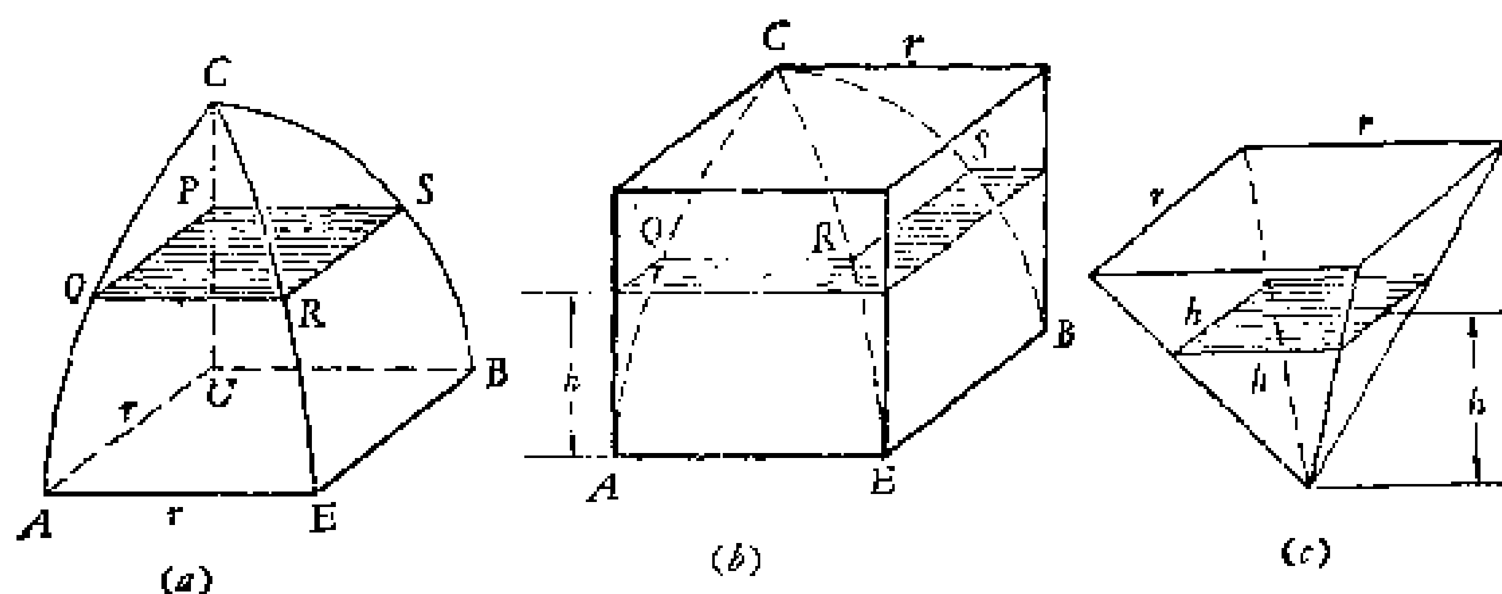
---

① 钱宝琮：《中国算学史》上卷，1932，第58页。
② 华罗庚：《旧珍宝新光芒》，载《北京教师月报》，1951年第二期，第23—27页。
③ 李迪：《祖冲之》，1977，上海人民出版社，第43—45页。
④ 《隋书·律历志上》。

大的"开立圆术"，也研究了张衡、刘徽在这个问题上的尝试。他批评了张衡，说他"述而弗改"，同时又从刘徽的未竟之业中获得启发。祖冲之和他的儿子祖暅在刘徽的基础上进行了深入探讨，终于使问题得到解决。

祖冲之父子对于球体体积计算的解决方法完全沿用了刘徽的一套思想，抓住了关键性的"牟合方盖"的体积计算。但是他们实际着手处理的不是牟合方盖本身，而是一个立方体取出其内切牟合方盖的剩余部分。为方便起见，我们把它叫做"方盖差"。再把"方盖差"自然分成八个相等的小立体，每一个称它为"小方盖差"。

祖氏父子考虑问题的方法进一步简化，即仅从八分之一立方体和所含的八分之一的牟合方盖入手。这样做是完全正确的。



2—15

在小方盖差中（图 2—15（a）），PQ 是这方盖水平截平面正方形的一边，令其为 a，UQ 是球半径 r，UP 是高，以 h 表示。QPU 是一直角三角形，于是由勾股定理得 $a^2=r^2-h^2$，这正是截平面 $PQRS$ 的面积。在同一位置上的小立方体的截

面面积为r^2，而r^2与a^2之差，即$r^2-a^2=h^2$，正是小方盖差在等高处的截面面积（图2—15(b)）。这个面积有一非常突出的特点，就是它正好是截面高度h的平方。祖氏父子抓住了这个特点，进行研究，结果发现：底边为r，高也是r的倒正方锥的截面面积也有这个特点（图2—15(c)）。就是说，小方盖差与倒立正方锥在等高h处的截面面积总成对的相等。这时，祖氏父子看到它们的体积关系，提出了"幂势既同，则积不容异"的原理，其中"势"是高，"幂"是面积，意思是说两个高相等的立体在任意等高处的截口的面积如果总成对相等，则它们的体积就不能两样。由此得到小方盖差和倒立正方锥的体积相等的结论。

正方锥的体积可以求出，它等于同底立方体的体积的三分之一，因而也就知道了小方盖差的体积。由小立方的体积减去小方盖差的体积，余下的就是八分之一牟合方盖的体积，也就是$r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{1}{8}V$（$V$：牟合方盖体积），于是

$$V=8r^3-\frac{8}{3}r^3=(2r)^3-\frac{1}{3}(2r)^3=\frac{2}{3}(2r)^3$$

这就是牟合方盖的体积。

但是，刘徽早已求出

$$V_{球}:V_{牟}=\pi:4$$

因而祖氏父子立刻就得到

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(2r)^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

即$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$。此公式就是球体体积的正确公式。当时祖氏父子以$\pi=\frac{22}{7}$入算，公式就变形为

$$V_{球}=\frac{11}{21}D^3\ (D=2r)$$

从《九章算术》以来的四百多年中，有关球体体积的计算，经过许多人的不懈努力，最后获得彻底解决，这也是我国数学史上一件大事，它不仅说明我国人民有能力从理论上独立解决实践中提出的数学问题，而且表现出方法的独特性。

祖氏父子的原理是刘徽原理的特殊情形。当刘徽原理中的比值等于1的时候，就变成了祖氏的结果。因此可称此特例为"刘-祖原理"。祖氏父子比刘徽高明的地方在于吸取了刘徽的教训，不再去钻那个牟合方盖的牛角尖，而改为研究方盖差的体积，从而找到了解决问题的途径，也正是这条途径才引导他们想出"幂势既同，则积不容异"的原理。由于条件限制，刘徽未能这样做。但刘徽的失败却导致了祖冲之父子的成功。

4．祖冲之父子的《缀术》及其它。祖冲之父子对数学进行了广泛的研究。据历史记载，他们都有《缀术》之作，父亲著《缀术》五卷，儿子著《缀术》六卷，两书之间有什么关系找不到记载，推测可能是先有父亲的五卷，儿子进行修改并且加了一卷。《缀术》由于原书早已失传，无法确切知道其具体内容。它是在《九章算术》及刘徽注的基础上完成的数学杰作，唐王孝通称赞说："祖暅之'缀术'，时人称之精妙。"① 这个"缀术"似乎是指的一种方法，由此可以推想："缀术"既是书名，又是方法名称。有关圆周率的计算和球体积的解决，无疑已包含于其中。祖冲之"又设开差幂，开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理"。② 很显然，"开差幂"、

① 王孝通：《上缉古算经表》。
② 《隋书·律历志上》。

“开差立”以及“正圆参之”都是《缀术》的内容。

“开差幂”中的“差幂”一词在刘徽注《九章算术》时就已用过，指的是面积差，“开”是指从面积求边长，由开方而来。因此，“开差幂”应包括由矩形面积差求某一边之长。以同一思想去理解“开差立”的含义，可能是包括由长方体体积差求其长、宽、高。问题就归结为解一个二次方程和一个三次方程。解二次方程在当时并不是件难事，因为在这之前的《九章算术》中已有这类问题。求三次方程的一个正根，就比较困难了。

“开差幂”和“开差立”不一定只限于长方形和长方体，

经》、《五经算术》、《数术记遗》和《夏侯阳算经》等几种。这些书基本上反映了当时社会各方面的需要。

1．《孙子算经》。现传本《孙子算经》三卷，大概成书于祖冲之以前。书前有序一篇，序中主要讲数学的用途，承认数学可以用于天文、测量、度量衡等方面。但是却认为数学"采神祇之所在，极成败之符验"，这是一种迷信思想。

《孙子算经》的内容远不如《九章算术》丰富和深奥。其中许多浅显的内容如进位制、九九口诀、四则算法等都详加记述。另外，如各种粮食调换的比例等则来自《九章算术》。这部书中有大量属于日常生活的应用题，可以说是一本启蒙的算术入门书。书中最有价值的内容是关于筹算法和"物不知数"问题。

《孙子算经》是目前发现的一本详载筹算法的书，其第一卷记有"凡算之法，先识其位。一从① 十横，百立千僵，千十相望，万百相当"。讲的是算筹的摆法。同时详细讲了筹算乘法和除法的步骤。由于在第一章已经讲过，这里不再重复。

《孙子算经》卷下第26题是"物不知数"。原题是"今有物，不知其数。三、三数之，賸二；五、五数之，賸三；七、七数之，賸二。问物几何？答曰：二十三。"这个问题是一个同余式组，设N为所求之数，就是

$$N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7$$

《孙子算经》还给出了解法，使我们初步窥见古代解同余式组的大体过程。解法全文是："三、三数之賸二，置一百四十；五、五数之賸三，置六十三；七、七数之賸二，置三十，并

① 从与纵同。

之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三、三数之賸一，则置七十；五、五数之賸一，则置二十一；七、七数之賸一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。”这个解法分两部分，第一部分属于本题，即

$$N=140+63+30-210=23$$

其中 $140=70\times2$，$63=21\times3$，$30=15\times2$，$210=2\times105=2\times(3\times5\times7)$，因而上式是由下式得来：

$$N=70\times2+3\times7\times3+3\times5\times2-2\times105=23。$$

第二部分相当于解下列同余式组：

$$N\equiv r_1(\mathrm{mod}3)\equiv r_2(\mathrm{mod}5)\equiv r_3(\mathrm{mod}7)$$

解法步骤是

$$N=70r_1+21r_2+15r_3-105p$$

p 为正整数。如果按原文理解，则 $r_1=r_2=r_3=1$，那么N和 p 均等于1。但是，其解法本身带有一般性。

这个解法可以推广到任意 n 个两两互素的自然数的同余式组 $N\equiv r_i(\mathrm{mod}p_i)(i=1,2,\cdots\cdots n)$ 的情形。设 $m=p_1p_2\cdots\cdots p_n$，如果能找到一组 k_i，满足 $k_i\cdot\frac{m}{p_i}\equiv1(\mathrm{mod}p_i)$，那么

$x=\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{m}{p_i}r_i(\mathrm{mod}m)$，问题就解决了。

“物不知数”问题，在欧洲，一直到十九世纪初法国数学家高斯（Gauss，公元1777—1855年）才在他于1801年出版的《算术探究》中给出了一般性定理。因此，“物不知数”问题在世界数学史上有一定的地位，外国称其为“孙子定理”或“中国剩余定理”。

2. 《张邱建算经》。这部算经是南北朝时期的著作，序题“清河张邱建”，作者事迹不详。书中有一题目说“今有率

户出绢三匹，依贫富欲以九等出之，令户各差除二丈”，和魏天安元年（公元466年）“因民贫富为租输三等九品之制”相符合，这种户调制度于太和九年（公元485年）废弃不用，而颁行均田法。由此可见，《张邱建算经》大约是在466—485年间写成的①。

《张邱建算经》所载问题，大部分都是社会上的实际问题，有关测量、纺织、交换、纳税、冶炼、土木工程、利息等方面的计算问题都有，涉及的方面较广，正如作者在序中所说写书的目的是：“余为后生好学有无由以至者，故举其大概而为之。”总的来说，书的内容比较严肃，切合实际，有一些创见，是《九章算术》以来一本较好的书。

张邱建在序中一开头就说：“夫学算者不患乘除之为难，而患通分之为难。”接着讲了通分和约分方法。他很注意分数计算的简化。需要以最大公约和最小公倍的地方，他都先求出这两个数。

书中对级数的研究是一个很大的进步，根据已知条件的不同，给出了六七个等差级数公式，如卷上第22题“今有女善织，日益功疾”，已知级数的首项、项数和总和，求公差问题。设a_1为首项，S为总和，n为项数，d为公差，则《张邱建算经》的解法相当于$d=\left(\frac{2S}{n}-2a_1\right)\div(n-1)$。第23题“今有女子不善织，日减功迟”，是一个已知项数、首项和公差，求总和S问题，用公式

$$S=\frac{1}{2}(a_1+d)n$$

① 钱宝琮校点《算经十书·张邱建算经提要》。

《张邱建算经》中最末一题是闻名于世的“百鸡问题”。原题是：“今有鸡翁（公鸡）一，直（值）钱五；鸡母一，直钱三，鸡雏（小鸡）三，直钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？”设x、y、z分别为鸡翁、鸡母、鸡雏的只数，根据题意，有

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

两个方程有三个未知数，因此是不定方程。书中给出了三组解：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78, \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81, \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$$

至于解法，书上只说：“鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。”寥寥十五个字，解得非常简单。这合乎现代解法，设t是整数参数，则$x=4t$，$y=25-7t$，$z=75+3t$。满足这组式子的t值只能是1、2、3，因此合乎题意的解答也仅有书上的三组。因此，张邱建是数学史上一题多解的首创人。

此外，《张邱建算经》中还讲了线性方程组解法、二次方程、算术难题的简化解法、重差术应用等等。

在《张邱建算经》序中有“夏侯阳之方仓，孙子之荡杯”的话，可见《夏侯阳算经》和《孙子算经》应在《张邱建算经》之前。现传本《夏侯阳算经》已非原书，可能是唐代韩延增修本。

3．《五曹算经》、《五经算术》和《数术记遗》。这三本数学书，现在都有传本，都是北周甄鸾编或注的。内容比较浅显，没有什么创见。甄鸾信佛教，不信道教，写了一本

《笑道论》，宣扬佛教，嘲笑道教。还研究过佛家经典和历法。注过《周髀算经》等书。因此，在他写的数学书中有明显的佛教内容。《五曹算经》可能是他当地方官时写的一本算术问题及解答集。

《五经算术》是甄鸾对古代经典，如《尚书》、《周易》《论语》、《周礼》、《礼记》等书中一些与数学有关问题的注释集。这本书有助于我们了解古代经典。但是书中用数学去解释"丧服经[①]带"和"丧服制食米溢数"等古代治丧中的数学问题。书名虽为"算术"，然实质是研究"五经"。

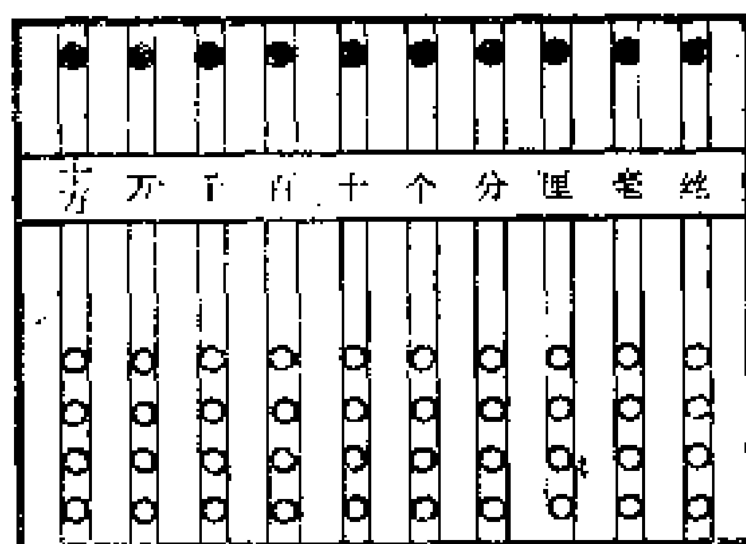
《数术记遗》卷首题"汉徐岳撰，北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注"。徐岳，东汉末时人，对数学进行过研究，有《九章算术注》二卷。《数术记遗》中佛教用语很多，因此，钱宝琮认为决不是徐岳的著作，而是甄鸾依托徐岳伪造的书。[②]是否如此，尚待研究。书中主要内容是大数进位和记数法。

《数术记遗》把古代的"隶首造数"说进一步演变成所谓"隶首注术，乃有多种"，"黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉"。所谓"十等"是指亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载十个大数名称。所谓"三等"是指大数三种进位制，即"下数者，十十变之，……；中数者，万万变之……；上数者，数穷则变，若言万万曰亿、亿亿曰兆，兆兆曰京也。"这些进位制都有循环的特性，由低一级进到高一级，只要变更一下特定的数名就可以通过循环达到进位的目的。

---

① 绖音叠，dié，古代丧帽丧带。
② 钱宝琮校点《算经十书·数术记遗提要》。

书中还有"积算"、"太乙"、"两仪"、"三才"、"五行"、"八卦"、"九宫"、"运筹"、"了知"、"成数"、"把头"、"龟算"、"珠算"和"计数"十四种算法。这些算法大都不见他书，虽然有简单说明，但其内容仍难确定。其中"珠算"一词第一次在这里出现，并解释说："刻板为三分，其上下二分以停游珠，中间一分以定算位。位各五珠，上一珠与下四珠色别。其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一。"这种"珠算"应象图2—16所示那样，因为没说有挡，珠可能放在槽里。与后世的珠算有相似之处，但两者是否有关，还不清楚。



2—16 《数术记遗》中"珠算"推想图

第三节 南北朝末期到北宋初期的数学

通过刘徽、祖冲之等卓越数学家的辛勤工作，把我国的数学发展向前推进了一大步，在理论方面达到了很高的水平，形成特点。从南北朝末期到北宋初期，数学结合土木工程、经济问题和天文历法等实际需要有了新的发展。

土木工程中的数学

隋、唐时代的城市、宫殿、寺院和桥梁等土木工程都具有

很高的科学水平。土木工程和天文历法都需要运用数学解决一些较复杂的问题。出身于“闾阎”①间的数学家王孝通对当时土木工程中的数学进行了研究、总结，作出了重大的贡献。

1．王孝通和他的《缉古算经》。王孝通研究过《九章算术》和《缀术》等书，可是当他运用这些书中的数学知识去解决实际问题时，就觉得适应不了需要。他对《九章算术》中专讲与土木工程有关的“商功”提出了批评，指出：“伏寻《九章·商功篇》，有平地役功受袤之术。至于上宽下狭、前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹邪②之用。斯乃圆孔方柄，如何可安？”③说书中讲的和实际工程提出的问题就象要在圆孔中安装方柄一样，安不上。他还认为《缀术》虽然“精妙”，可是也存在一些不足之处，如“方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽”④，就是说，祖暅的《缀术》对于一些立体体积的处理有错，有的问题也未讲清道理。王孝通刻苦钻研数学，创立了新术，著有《缉古算经》一书，适应了当时的需要。王孝通还参加了唐初的历法改革工作，这项工作也需要大量数学知识。

《缉古算经》流传到现在（已残），成为我国珍贵的数学遗产。这部书共包括二十道题，大体可以分为四类：第一类是天文问题，只有一题；第二类是土木工程中的数学问题，有六题；第三类是地窖和仓库的容积问题，有七题；第四类是勾股问题，有六题。每道题都有答案和解题步骤，并有自注。

---

① 闾阎即小巷。
② 欹邪音七协，qī xié，歪斜的意思。
③ 王孝通：《上缉古算经表》。
④ 同上。

书前有一篇《上缉古算经表》,反映了王孝通的数学观点。他认为数学大有用处，“重句聊用测海，寸木可以量天”，是“司牧黔首”①的工具。他还把数学看作“其理幽而微，其形秘而约”的学问。意思是说理论深奥，形象也不明显。空间形式和数量关系，在他看来乃是一种“宇宙之至精”。这些就把数量关系神秘化了。王孝通认为《九章算术》来源于“周公制礼”，说什么“昔周公制礼,有九数之名。窃寻九数即‘九章’是也。”

王孝通对自已的数学著作很自信。他在《上缉古算经表》里说：“请访能算之人考论得失，如有排其一字，臣欲谢以千金。”确实，在《缉古算经》中很少发现错误，可见他治学严谨，态度认真。

他在书中所收的二十道数学问题大都较难，有的题答案就有27个之多，正如王孝通自己所说的：是“于平地之余，续狭斜之法”，特地找那些前人没有研究或未解决的实际问题加以探讨，获得重大成就。

《缉古算经》写成后，引起当时人们的极大注意和重视。公元656年,唐朝的国立学校——国子监内添设了数学科,搜集了唐以前的数学书《九章算术》等作为教科书，王孝通的《缉古算经》也在其中。直到宋代仍然把这本书作为必修教材。元丰间（公元1078—1085年），宋代出版《算经十书》，《缉古算经》也是其中之一。后来此书又传到日本等亚洲国家。

2．堤坝型体积的公式。王孝通《缉古算经》中的四类问题，以第二类最为重要。关于堤坝题讲了需要解决整个工程量

① 司牧黔首是统治平民百姓的意思。

的大小及各县分担任务的多少。这就需要根据已知条件求出体积，再计算其它所求答案。书中第三题比较典型，为了说明问题，不妨把它的意思写出来：

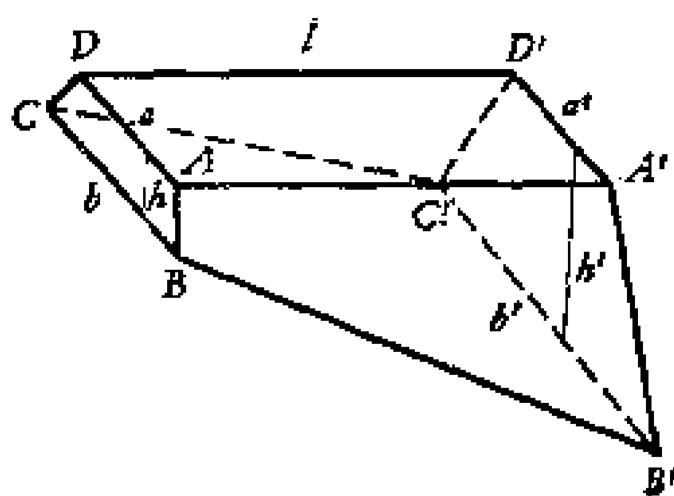
要修筑一堤，西头上、下宽之差($b'-a'$)为六丈八尺二寸。东头上、下宽之差($b-a$)为六尺二寸，东头高西头高之差($h-h'$)为三丈一尺，上宽与东头高之差($a-h$)四尺九寸，东西水平的长度与东头高之差($l-h$)为四百七十六尺九寸。甲县六千七百二十四人，乙县一万六千六百七十七人，丙县一万九千四百四十八人，丁县一万二千七百八十一人。四个县每人每天挖土九石九斗二升、填土十一尺四寸又十三分寸之六。挖土一立方尺按八斗计算。在平地上每运土二斗四升八合、走一百九十二步，每天可运六十二次。现在是“隔山渡水取土”，其中平地只有十一步，山斜坡为三十步，水宽十二步。上山三步折合平地四步，下山是六步折合五步，过水是一步折合二步。以上四个数据要“十加一”算。还有“载输”十四步。假定每人作功都是一样的，四个县的人一齐动工，可一天完竣。现在工程的分配，从东头起依次为甲县、乙县、丙县、丁县。现在问：堤的斜高、东西长度、东西头的高度、两头的上下宽度、每人每天完成的工程量以及各县所分的长度、斜长、高、下宽各多少？

这个问题很复杂，现在来解也要费一些思索。可是在一千多年前的王孝通却把所有的答案求了出来。而且用现代数学来验证也都是正确的。王孝通在解法最后特别给出了堤的体积计算步骤（图2—17），即“置西头高(h')倍之，加东头高(h)，又并西头上、下广（宽）(a'、b')，半而乘之。又置东头高而倍之，加西头高，又并东头上、下广(a，b)，半而乘之。并

二头积$\left(\frac{a+b}{2}h, \quad \frac{a'+b'}{2}h'\right)$，以正袤（$l$）乘之，六而一，得堤积（$V$）也。”稍加整理就得到下面的公式

$$V=\frac{l}{6}\left[\frac{a+b}{2}(2h+h')+\frac{a'+b'}{2}(2h'+h)\right]$$ ①

王孝通的计算步骤带有一般性。凡是那种有两个面平行的六面体的体积都可以用它求出来。但是，怎样求得法，《缉古算经》没有说明。这个公式是前所未有的。现在的土木工程，仍然可以用这公式计算体积。



2—17 堤坝示意图

3．三次方程。王孝通善于把几何问题通过代数方法去解决。《缉古算经》的二十个问题中有一大部分要化为一元二次方程，三次方程，或四次方程。其中三次方程是最主要的。书中的三次方程，大都能够化为$x^3+ax^2+bx=c$型。例如第三题求甲、乙、丙各县所分担的筑堤长度都归结为解此型三次方程。第二题也有一相当于$x^3+1620x^2+850500x=146802375$的三次方程，都是很典型的。

王孝通如何解这些三次方程，书中没有详细讲。只是先列出方程，说以c为“实”（常数项），b为“方法”（一次项系数），a为“廉法”（二次项系数）。就是把算筹按照一定的次序排列起来，然后进行运算，便是解方程。这与现代解法

① 沈康身：《王孝通开河筑堤题分析》，载《杭州大学学报》（自然科学版），第1卷第4期（1964），第43—58页。

的道理相似，王孝通叫做"开立方除之"，就是求出正根x。至于怎样"除之"，书中没加说明。

在王孝通以前，人们是否已经提出过三次方程，现在还是一个谜。《缀术》中的"开差立"，可能就是解三次方程。由于《缀术》早已失传，具体情况无法确知。因此，可以认为：王孝通的三次方程是目前流传下来的最早的三次方程。

外国人对三次方程的提出和研究都晚于王孝通。早在半个世纪前日本的三上义夫就说过："唐王孝通之《缉古算经》，使用三次方程式以解各种问题。""三次方程式，在阿拉伯算学上，乃甚显著之事，然中国成立三次方程式，乃在阿拉伯之前；而由术文推得之方程式解法，亦与发达于阿拉伯者全不同也。"①实际上，阿拉伯人到十世纪以后才有三次方程，十一、二世纪间中亚的学者奥马尔·海牙姆(Omar Khayyam，公元1048?—1122年)较系统地研究了三次方程的数值解法和几何作图法，②至于欧洲人就更晚了。可见，王孝通的三次方程研究是有世界意义的。

王孝通根据社会实践的需要，从事数学和天文学研究，取得很大成就。可是他对数学和天文学的某些认识是模糊和落后的，同时有一种固步自封的骄傲情绪，这在一定程度上限制了他的发展。他的《缉古算经》也不是完美无缺的。

---

① 三上义夫著、林科棠译：《中国算学之特色》，载《万有文库》本，第34页。
② M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Time, 1972, New York, pp. 193—195。

天文历法中的内插法

隋唐时期，我国的天文历法有很大发展，出现了《皇极历》、《大衍历》等优秀历法。为了更精确地计算历法问题，天文历法工作者应用了先进的二次内插法。

1．等间距二次内插法的应用。在古代，人们把太阳和月亮的视运行看作是匀速的，因此一年中二十四节气之间的时间间隔都是相等的。但事实上，太阳和月亮的视运行，并不匀速。早在东汉末年刘洪就已发现月行有快有慢，南北朝末期北齐的张子信通过长期观测又发现太阳也有类似现象，他指出："日行在春分后则迟，秋分后则速"，这现象基本上符合现代观测结果。原来认为太阳是匀速运动，计算就很简单，可是当已经发现视运动不匀速这一事实，要想精确计算太阳运行等问题就不能再用老方法，必须创造新的计算公式。正是在这种情况下，隋代卓越的天文学家刘焯在《周髀算经》中一次内插法的启发下，首先在天文历法研究中应用了等间距二次内插法公式。

刘焯（公元544—610年）勤奋好学，刻苦钻研。他"为学不倦，《九章算术》、《周髀》、七曜历书十余部，推步日月之经，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥，著《稽极》十卷、《历书》十卷行于世。"①他在隋开皇二十年（公元600年）上《皇极历》，又曾提出在中原黄河南北的平地上进行大地测量的建议，以验证古代"寸差千里"②的说法，都未实行。他

① 《北史·刘焯传》。
② 《隋书·天文志上》。

在《皇极历》中四处使用了等间距二次内插法公式。即（1）求两节气间某段日的迟速数；（2）“求月朔弦望应平会日所入迟速”；（3）“推朔弦望定日术”；（4）“求月入交去日道”。① 现以第一个问题为例具体说明《皇极历》对内插法的应用。算法原文如下：

“推每日迟速数术：见求所在气陟② 降率，并后气率，半之；以日限乘，而汛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残、汛总除，为总差。其总差，亦日限乘而汛总除，为别差。率：前少者以总差减末率为初率；前多者，即以总差加末率，皆为气初日陟降数。以别差〔半之〕前多者日减，前少者日加初数，得每日数。所历推定气日随算其数陟加降减其迟速，各为迟速数。”③

这段话是说：刘焯一方面把二十四气仍按等分，即取相等的二十四个时间间隔，但实际上每两气间的时间长度有短有长，与等分相比的差数就是“陟降率”，每一个节气和两节气间的某一日比按平均计算迟到或早到时间数叫做“迟速数”。这个问题是已知两气间的陟降率（Δ_1）以及后一气的气率（Δ_2），求此两气间某日（n）的迟速数 $f(x)$。命 $f(a)$ 为该日前一气率的迟速数，则按上面的引文知刘焯的计算相当于公式

$$f(x)=f(a)+n\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+n(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{n^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

这就是刘焯等间距二次内插法公式。其余三处的计算步骤与此基本相同。

---

① 严敦杰：《中算家的招差术》，载《数学通报》，1955年1月号，第4—13页；李俨：《中算家的内插法研究》，1957，科学出版社，第24—35页。

② 陟音直，zhì，上升的意思，陟降就是升降。

③ 《隋书·律历志下》。

刘焯的算法对后来的历法研究有很大影响。十九年后唐傅仁均制《戊寅历》（公元619年）和六十多年后李淳风造《麟德历》（公元664年）都用到类似公式。特别是李淳风用的次数更多。他对刘焯的算法评价很高："微密至当，以示算理通涂（途）"。刘焯的算法确实是数学发展史上的一项重要成就。在外国，印度的婆罗门笈多（Brahmagupta）于628年用等间距内插法公式计算正弦值①；阿富汗著名科学家阿尔·毕鲁尼（公元973—1048年）在计算正弦值和正切值时也用了等间距二次内插法公式②，都晚于刘焯。

2．不等间距二次内插法的应用及其它。刘焯的算法虽然是一项重大成就，但是仍有局限性。因为他所取的间距还是相等的。实际上，二十四节气的安排应当使用不等间距的内插法才更合适。此项工作由张遂完成。



张　遂

张遂（法名一行，公元683—727年）唐代著名天文学家，领导了有名的天文大地测量，又和梁令瓒共同创造了"黄道游仪"和"水运浑仪"等大型天文仪器，还编订了《大衍历》等书。他根据大量观测资料，在刘焯等前人的基础上首先提出了定气的概念，按不等的时间间隔安排二十四节气，把刘

---

① Prabadh Chandra Sengupta 译. The Khandakhadyaka, an Astranomical Treatise of Brahmagupta, 1934, Uni. of Calcutta, P. 142

② Б. А. Розенфельд, Попытка квадратичного интерполирования у Абу-р-рейхана ал-Бируни, Историко~Маматические исследования выпуск Ⅻ, 1959. стр421—430。

焯的公式由等间距推广到了不等间距的情形，建立了不等间距二次内插法公式。张遂计算太阳视运行速度的步骤原文如下：

"〔步日躔术〕以所入气，并后气盈缩分(Δ_1,Δ_2)，倍六爻(s)乘之，综两气辰数(w_1,w_2)除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差。至①后以差加末率，分②后以差减末率，为初率。倍气差亦倍六爻乘之，复综两气辰数除〔之〕为日差，半之，以加减初、末〔率〕各为定率。以日差，至后以减，分后以加，气初定率，为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日(a)加减气下先后数，各其日定数($f(a+s)$)。"③

把这段话所述的内容改成现代数学符号，并稍加整理，便得到在距某入气日 a 前后 s 日的太阳视运行速度的计算公式：

$$f(a+s)=f(a)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{w_1+w_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{w_1}-\frac{\Delta_2}{w_2}\right)$$
$$-\frac{s^2}{w_1+w_2}\left(\frac{\Delta_1}{w_1}-\frac{\Delta_2}{w_2}\right)$$

这就是数学史上有名的"张遂内插法公式"的现代形式。它和刘焯公式的主要不同之点是间距不同，即公式中的 $w_1\neq w_2$，当 $w_1=w_2=1$ 时即得刘焯公式。

此外，张遂在《大衍历》中第一次把"齐同术"用于历法计算上。另外，在已知日数 n 和某行星在第一日内的速度 a、每日速度差 d，张遂用相当于下面的公式

$$s=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)$$

① "至"：冬至、夏至。
② "分"：春分、秋分。
③ 《新唐书·历志四上》。

计算n日内此行星所行的度数①。这是一个已知首项、公差和项数的等差级数求和公式。如果已知s、a、d，那么《大衍历》还有一个相当于下面求n的公式

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a-d}{d}\right)^2+\frac{8s}{d}}-\frac{2a-d}{d}\right],$$

这显然是二次方程 $n^2+\frac{2a-d}{d}n=\frac{2s}{d}$的正根②。

唐代后期的徐昂，在所制《宣明历》中计算太阳、月亮视运行速度时，"皆因《大衍历》旧术"，就是用张遂的不等间距二次内插法计算的。

运筹应用事例

唐宋时期，在军事上、生产上经常运用属于现代对策论（博弈论）、规划论、统筹方法等原始运筹思想方法。

1．在军事方面的运筹事例。军事方面运用筹划的事例很多。北宋成书的《武经总要》（公元1044年）中记载着从春秋战国到北宋初的上百个例子③，有着丰富的运筹学原始素材。

在其它书上也有许多与军事有关的运筹事例。最有名的是沈括的行军运粮问题。沈括（公元1030—1094年）曾带兵打过仗，认识到军粮是个大问题，军队自己运粮不仅负担太重，而且难于行远。最好的办法是从敌人手中夺取。为什么这样做？他有如下的计算：

---

① 《旧唐书·历志三》。
② 钱宝琮：《中国数学史话》，1957，中国青年出版社，第133—134页。
③ （宋）曾公亮等：《武经总要后集》卷一～十五。

由于作战的士兵本身都带着武器装备，不可能多带粮食，只有抽调大批民夫运粮。假定每个民夫背六斗①粮食，士兵自带五天的干粮，每人每天吃二升，一个民夫供应一个士兵，两个人可单程进军十八天。如果把回程计在内，则只能进军九天。如果两名民夫供应一个士兵，两人共背一石二斗，三人同吃，每天六升，到第八天遣返一名民夫，给他六天的粮食，此后两人同吃。和上面的算法一样，单程可进军十八天（包括士兵自带的五天干粮在内），总共可进军二十六天。有回程则只能进军十三天。如果三名民夫供应一个士兵，三人共背一石八斗，前四天半四个人同吃，每天八升，遣返第一名民夫，给他四天粮食。以后三人同吃，每天六升，到第八天遣返第二名民夫，给他九天的粮食，余下的两个人可吃十八天。这样可单程进军三十一天，有回程时则只能进军十六天。沈括算到这里便大吃一惊，他看到三名民夫供应一个士兵已经达到顶点了，如果出兵十万，其中还有约三分之一的兵员押送辎重，能作战的只有不到七万人。这就至少需要动员三十万民夫运粮，不能再增加这个比例了。可是事情还要复杂得多，民夫每人背六斗是按平均数计算的。此外，队长不自带干粮，炊事员所带减半，再加上死亡、生病等情况，民夫的负担还要加重，常不止六斗。如果用畜力驮运，每匹骆驼驮三石，骡、马驮一石五斗，驴驮一石，与人背相比驮的多花费也少，可是一旦草料供应不及时，牲口就要消瘦或死去。牲口一死，所驮的粮食只好全部扔掉。因此，沈括得出结论：用牲口驮运与用人力背送，利害相当，没有显著的优点。他在这里用运筹学思想，解决行军运

---

① 宋斗比现代斗小得多。

粮问题，自运不合适，最好的办法是想法从对方夺取。①

2．在经济和运输方面的运筹事例。唐代中期，有个理财家刘晏（公元715—780年）在这方面有突出的成就。他生活在“安史之乱”后，当时全国经济遭到很大的破坏，必须设法恢复经济，增加国库收入。刘晏想了很多办法，能在“人无厌苦”，“人不加赋”的情况下，使国家财政收入大量增加②。他在许多具体事务的处理上，表现有明显的运筹思想，现举几例：

当时京师长安一带（即关中地区），遭受破坏最严重。到公元767年，“中外艰食，关中米斗千钱”，粮价昂贵。造成这一情况的主要原因是由于汴水湮废。以前都是通过汴水把东南方的粮食运进长安，而现在只好“由长江、汉水抵汉中，遇险劳费”。刘晏经过分析，对比了各种方案，认为当时的运输方案不好，因而决定“疏浚汴水”，结果是“每岁运米数十万石以给关中”③，节省了大量的物力和人力。

刘晏解决物资调运问题时，根据不同情况采取不同决策和多级决策的方法。当时通过长江、黄河、汴水和渭水向长安调运物资，各河道水流缓急不同，特别是黄河水流湍急，从其它河流进入黄河的船只多不适应，往往覆舟。刘晏根据这种情况，采取了分别造船，沿水建立粮仓，分阶段运输，结果效果很好。每年运输量大为增加，有时达到一百多万石，而且不再出现覆舟的现象④。

3．在工程方面的运筹事例。这方面的例子很多，下面仅

---

① 沈括：《梦溪笔谈》卷十一。
② 《旧唐书·刘晏传》。
③ 司马光：《资治通鉴》卷二十七、二百二十三、二百二十六。
④ 《旧唐书·刘晏传》。

举几个。

北宋真宗大中祥符八年（公元1015年），京城开封的皇宫失了大火，建筑物被烧毁。宋真宗命丁谓主持修复工程。这种工程比完全新建要复杂得多，既要拆除烧毁的建筑物，又要清理废墟。如果没有合理的施工方案，不仅拖延工时，而且还要造成巨大的浪费。丁谓经过分析研究，提出这样一种办法：把皇宫前的大街挖成一条大沟，利用挖出来的土作为建筑材料，就不必从远处运土了。同时再把汴水引入这条大沟。从外地来的船只、木筏等载着各种建筑材料可以直抵建筑工地。竣工之后，再把那些废弃的碎砖烂瓦和大量的垃圾全部填进沟中，修复原来的大街。这样，可以"一举而三役济"，是一个最优的施工方案，结果节省的费用"以亿万计"①。

北宋仁宗庆历八年（公元1048年），黄河在河南商胡决口，如何堵塞，工程非常艰巨。当时堵塞决口的方法是把"埽"②从决口两侧逐渐向中间放置。放中间的最后一埽最为关键，也是最难的一步，称为"合龙门"。这次决口，屡塞不合，合龙门的埽多被冲走。"水工"高超建议把大型埽分为三节，中间用绳索连接。先下第一节，使它下到水底；水流虽未断绝，但水势已减半，下第二节时就省力很多，下第三节就等于平地施工。最后根据这建议进行施工，得到成功。这个施工方案大大优于旧方案。它不仅能加快塞决的速度，而且可以节省大量物资和人力。③

---

① 《梦溪补笔谈》卷二。
② 埽音扫，sào，与扫同。这里是指用荔草、木枝夹上土石捆成巨大的捆子。
③ 《梦溪笔谈》第十一卷。

还有其它一些事例①，这里不再列举。

唐宋时期数学教育与中外交流

1．国家数学教育。我国数学教育有悠久的历史，早在周代的“六艺”②教育中就包括数学教育。到隋代，在最高学府——国子寺中设有算学博士二人，算助教③二人，从事数学教学工作，有学生八十人④。这是我国有专门数学教育的开始。

唐朝建立后，在隋的基础上继续举办数学教育，把数学作为一个专科，与明经、进士、秀才、明法、明书并列为六科。数学科当时叫做明算科⑤。唐朝也设有算学博士二人，“掌教文武官八品以下，及庶人⑥子之为生者”⑦还有算助教一人。算学博士的官秩很低，只有从九品下，而算助教则没有品级⑧。

唐初为了教学的需要，由科学家李淳风等人共同审定并注释了十部数学书，作为明算科的教科书。根据一些古书的记载，有《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》等九部，还有一部，可能是《夏侯阳算经》。

---

① 李迪：《我国古代运用筹划的几个事例》，载《数学的实践与认识》，1977年第4期，第85—88页。
② “六艺”指礼、乐、射、御、书、数。
③ 算博士、算助教是教数学的教师。
④ 《隋书·百官志》。
⑤ 《新唐书·选举志》。
⑥ 庶人是百姓的意思。
⑦ 《唐六典》卷二十一。
⑧ 《新唐书·百官志》。

唐代的明算科分两组学习。每组十五人，第一组学《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《夏侯阳算经》和《周髀算经》。限六年学完。每种书学习多长时间也都有明确规定，比如《九章算术》和《海岛算经》合起来学习三年，等等。第二组学《缀术》和《缉古算经》，前者学四年，后者学三年①，共学七年。同时这组还兼学《数术记遗》、《三等数》②两书。《缀术》是两组中学习年限最长的书。

考试也分组进行。在第一组中，除《九章算术》出题三条外，其余都各出一条；在第二组中，《缀术》出题六条（或七条），《缉古算经》出题四条（或三条）。考试的要求是"明数造术，详明术理，然后为通"。每组各十条，规定有六条通过就算合格，还要附加《数术记遗》和《三等数》两书。"读令精熟"，考试时也要参考，"十得九"才算通过。③明算科毕业考试通过的人员要交吏部录用。④

数学教育在唐代是不稳定的，可以说兴废无常。唐初，人员较多，有时各科共有学生八千多人，校舍一千二百间。光是书、算等科最多时就有教师、学生三千二百六十员。⑤ 可以看出，当时教育的盛况。但是到唐代中后期，有时算学只有十个人，甚至完全停办。

五代时，由于战争不断，数学教育便无从谈起。北宋初期

① 《唐六典》卷二十一；《新唐书·职官志》。
② 《三等数》一书早已失传，内容不详，估计可能是一本专讲三种大数进位制的算术书。
③④ 《唐六典》卷二；《新唐书·选举志》。
⑤ 《唐会要》卷三十五。

虽设有"算学博士"，但并未兴办数学教育。直到元丰七年（公元1084年）才有算学考试之举。崇宁三年（公元1104年），才正式建立算学科。可是不久废止，后又复置。当时有算学博士及办事人员十二人，学生二百六十人。教科书仍然是唐代的那套"算经"①。元丰七年有刊本，因《缀术》已经失传，没有包括在内。

2．中国数学的外传。隋唐时期，中外贸易和文化交流都盛于前代。中国数学的早期外传，主要是传到朝鲜和日本。中朝两国是山水相连的近邻，中国数学随时都能输入朝鲜，同时又从朝鲜传入日本。因此，朝、日两国的数学颇受中国影响，他们的数学教育制度和教科书也基本上是采用中国的。

六世纪时，由个别佛教僧侣把中国算术原文从朝鲜带到日本。②又有记载说公元554年，有朝鲜易博士③王良道、王保孙，始以中国历法传入日本④。可见，至迟在六世纪时，中国的算术和历法已在朝鲜流传。如前所述，中国历法中有高深的数学计算，通过历法的交流也是向朝鲜、日本传播数学的一种重要途径。在朝鲜的三国时代（相当于中国的唐代），受中国数学的影响相当明显。当时朝鲜有关田地、农作、租税、谷物交换、运输等方面的计算法可能都是来自《九章算术》⑤。在朝鲜古代的建筑中使用了中国的两个圆周率值$\frac{22}{7}$和3.14，还有《九

① 宋刊本《数术记遗》后面多"算学源流"一篇。
② J.E. Hofman 著，H. O. Midonick译，Classical Mathematics，1959 New York，P. 112.
③ "易博士"就是讲解《易经》的专门人员。
④ 《日本书纪》卷十九，据《国史大系》（日本），第一册，第336页。
⑤ 金容云、金容局：《韩国数学史》，1978，日本槙书店，第49—60页。

章算术》中的二次方程和《缉古算经》中的三次方程等。①

朝鲜于公元717年设置医博士、算博士各一人。同时期或稍后，在国立学校中“差算学博士若助教一人，以《缀经》、《三开》、《九章》、《六章》教授之”。②其中《缀经》可能是我国的《缀术》，《九章》即《九章算术》，《三开》和《六章》两书在我国不见记载。到朝鲜李朝仁宗十四年（公元1136年）时，所用教科书稍有变化。当时考试分两天进行，“凡明算式贴经，初日贴《九章》十条，翌日贴《缀经》四条，《三开》三条，《谢家》三条”，两天全通为合格③。这里由《谢家》代替了《六章》。大约在唐宋之间，我国有一部《谢察微算经》三卷，现已失传，朝鲜所用的《谢家》当即此书。

中国数学六世纪传入日本后，逐渐被日本所熟悉，所研习。日本于公元702年开始建立学校，包括数学科。所用教科书为《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《缀术》、《周髀》、《六章》、《三开》、《重差》和《九司》④。很显然，前六种就是我国的《九章算术》、《孙子算经》等的简称。《九司》在我国也不见记载。《六章》、《三开》两书也见于朝鲜，很可能同出一源。《重差》一书，可能是《海岛算经》。在日本又有《海岛》，不知与《重差》是否一书？《隋书·经籍志》有《九章重差图》也不知与日本的《重差》是否同为一书？日

① 洪以燮：《朝鲜科学史》，1944，东京，第111—112页。
② 金富轼：《三国史记》卷三十八“杂表第七·职官上”。
③ 郑麟趾等：《高丽史》卷七十二“选举一”；（朝鲜）《增补文献备考》卷一百八十八“选举考”。
④ 李俨：《中算输入日本的经过》，《中算史论丛》第五集，1955，科学出版社，第168—186页。

本的考试方法和分组学习等，都和我国相似。

在九世纪日本的书目中又有了《夏侯阳算经》、《张邱建〔算经〕》、《五经算〔术〕》、《数术〔记遗〕》、《婆罗门阴阳历算》、《元嘉算术》等①。可见当时我国的数学书绝大部分都传到日本。只有王孝通的《缉古算经》不见传入的记载。

唐代中日来往较多。日本经常派遣留学僧到我国来学习，最有名的如吉备朝臣于公元717年来我国留学，一直住了十六年。回国时带去了《大衍历经》一卷、《大衍历立成》十二卷、测影铁尺一枚、铜律管一部等②。这样，《大衍历》中的内插法，自然也就传到日本。使用内插法的《麟德历》和《宣明历》也被日本采用。日本使用《宣明历》的时间很长，达八九百年之久③。因此，内插法是日本历法家所熟悉的。

唐宋期间中国数学对印度等国家也有影响。早已有人认为印度的几何学"来自希腊和中国"，例如印度数学家巴斯卡拉（Bhaskara）于公元1150年对勾股定理的证明，和赵君卿证法完全一致。可能是根据中国早先给出的证明④来证的。印度还有"折树着地"问题、"莲花"问题⑤，和我国《九章算术》勾股章的"折竹着地"、"葭生中央"问题，除个别数字不同外，几乎完全相同。显然是受了《九章算术》的影响。

---

① 藤原佐世：《日本国见在书目》，（中国）《古逸丛书》收入此书。

② 《续日本纪》，（日本）《国史大系》第二册，第197—198页。

③ 山本一清：《日本天文学史》，1937，原生阁·恒星社《图说天文讲座》第八卷，第13—14页。

④ F. Cajori: A History of Elementary mathematics, 1917, N. Y. P.123.

⑤ В. Д. Чистяков Матерналы по историн математики в Китае и Индии, 1960, стр. 142—145。

印度古代数学中关于球体体积的公式就是《九章算术》中的 $\frac{16}{9}D^3$①，决非偶然。七世纪时的印度数学家婆罗门笈多和前面提到的巴斯卡拉在自己的书中都提到了和“孙子定理”相类似的问题②。

苏联的哥尔门果洛夫曾经指出：“中国数学和希腊、罗马、印度、中亚细亚和中世（欧洲）的关系还很少研究。但是这种关系是存在着的：不少国家的数学手稿上，算题的数据恰恰与中国的原著相同。”③在意大利梁纳多（Leonardo of Pisa)的《算盘书》（*Liber abaci*,1202）上重现了“孙子定理”④，在阿拉伯文的算书和后来欧洲的数学文献中都有和“孙子定理”相类似的问题⑤。

此外，中国的“盈不足术”、比例算法、“百鸡术”等，也都在这个时期传到阿拉伯或欧洲。

3．外国数学传入我国。数学和其它文化科学一样，影响和交流都是相互的，特别是印度的数学传进我国最早。印度大数、小数记法早随佛教经典于晋以后传进我国⑥。隋代则传进我国一批天文数学书，见于记载的有《婆罗门天文经》二十一卷、《天文说》三十卷、《婆罗门天文》一卷、《婆罗门算法》

---

① B. Д. Чистяков: матерналы по историн математики в Китае ииндии, 1960 стр. 142—145。

② L. E. Dickson:History of the theory of numbers Vol. Ⅱ,1952, Chicago,PP. 58—59。

③ Большая советская энциклопедия, 1954, Том. 26, стр. 469。

④ B. Д. Чистяков материалы по истории математики в Китае и индии, 1960, стр.103。

⑤ G. Lolia, Storia delle matematiche, 1950, Milano, P. 153—154。

⑥ 李俨:《中国古代数学史料》,1954,中国科学图书仪器公司,第158—169页。

三卷、《婆罗门阴阳算历》一卷、《婆罗门算经》三卷①。这些书当时大概都没有翻译，后来全部失传。

唐开元六年（公元718年），我国天文学家瞿昙悉达奉唐玄宗之命将《九执历》翻译为中文，又编写了《开元占经》一百一十卷。《九执历》即载于此书的卷一百零四。其中关于数学内容有印度数码和三角函数表两项。

印度数码即现在通行的阿拉伯数码的前身，于中世纪传入阿拉伯，再传入欧洲，流行于全世界。由九个符号表示九个单个数目，遇空位时用一点或一个圆圈顶位。遗憾的是，译者没有把这些字写出，在书上只是打九个方框，如下：

一字	二字	三字	四字	五字	六字	七字	八字	九字
□	□	□	□	□	□	□	□	□

书中接着写道："右天竺（即印度）算法，用上件九个字乘除，其字皆一举札而成，凡数至十，进入前位，每空位处，恒安一点。有问咸记，无由辄错，连算便眼"②。这是讲用九个数码进行笔算；同时指出了缺点。由于我国有固有的筹算，因此没有接受印度的笔算。

《九执历》中有由$3°45'$到$86°15'$每隔$3°30'$的正弦表，包括$90°$角的正弦值在内共有24个值。数值都用分数表示，分母均为3438，例如$3°45'$的正弦值为$\frac{225}{3438}$（$=0.06544$），$67°30'$的正弦值为$\frac{3177}{3438}$（$=0.92408$），$86°15'$的正弦值为$\frac{3431}{3438}$（$=0.99796$）。这里的公分母3438是圆的半径r，其计算是把全圆周分为$360°$，每$1°$分为$60'$，于是

① 《隋书·经籍志》。
② 《开元占经》卷一百四。

$$2\pi r = 360 \times 60 \qquad (\pi \approx 3.1416)$$

或
$$r = \frac{360 \times 60}{2\pi} \approx 3438$$

那些分子的头一个225是由$\frac{90^\circ}{24} = 3^\circ 45'$而来，即$3^\circ 45' = 225'$。以下是由225开始通过等间距二次内插法算得。

第四节　传统数学发展的高峰

如上所述，从南北朝末期到北宋初期，约五百年，我国积累了丰富的数学素材，到北宋中期至南宋末期，数学伴随着整个生产技术和其它科学的发展而形成了高峰，特别是在代数方面取得了一系列世界第一流的成果。

两宋时期数学发展的概况

1．两宋形成数学发展高峰的原因。

国内商业与海外贸易的大发展是数学发展的新因素。北宋政权建立后，商业贸易比唐代有了更大的发展。这时，大城市迅速增加，全国十万户以上的城市有四十多座，几乎是唐代的两倍。海外贸易也特别发达，泉州、广州、明州（今浙江宁波市）、温州、杭州等都成为重要的对外贸易港口。当时出口的物资主要是丝织品、陶瓷、铁器、漆器等，进口的主要是香料、药物、“宝物”、布匹等，种类很多。宋政府沿袭唐代的制度，设置了专门管理海外贸易的机构——市舶司，首先制订了

统一的法令，又实行“抽分”①的贸易税。这就向数学提出了新的课题。

宋代（特别是北宋）的土木工程和水利工程较多，在建筑和治水中，人们要求提高技术水平，推广先进经验，宫殿建筑或其它建筑逐渐形成规格化，完成了《木经》、《营造法式》、《河防通议》等有关建筑和水利的专门著作。这些书中都有许多计算问题，对数学提出了一些新的要求。在宋代数学著作中，除继续有同前代类似的土木工程问题之外，还有其它各种新问题。

宋代各门科学普遍发展，达到较高的水平。如提出世界上最早的火药配方，指南针的发明与应用，发明了活字印刷术，沈括完成了在科学史上有重要地位的《梦溪笔谈》，制成了闻名于世的机械计时器和天文仪器，在生物学、医药学、地学、机械等方面都有成就。

宋代在学术上有更多的自由，虽然当时有所谓“道学”，但是并未发展到统治地位。总之，宋代学术研究的气氛较浓厚。数学在这种有利的环境下，与其它学科竞相发展，是必然的。

数学家的出现也是宋代数学发展的不可忽视的原因。由一些数学家开辟的方向往往要影响很长一段历史时期。北宋的刘益、贾宪、沈括，南宋的秦九韶、杨辉等数学家的工作，不仅把宋代的数学推向高峰，而且对元代数学的发展也有深远影响。

2．大量数学著作的出现。隋唐时代的数学著作不过一、

① 抽分是指从全部货物中抽取若干分的意思。计算时是把总数分为十分。

二种，但是在宋代前后不到三百年却写出了五十多种，平均每五、六年一种，其中有些著作水平极高。现据《宋史·艺文志》(i)、《崇文总目》(ii)、《直斋书录题解》(iii)、程大位《算法统宗》(iV)以及其它书中的记载列举书目如下：

(1) 李绍穀《求一指蒙算术玄要》一卷((i))。

(2) 夏翰《新重演议海岛算经》一卷((i))。

(3) 徐仁美《增成玄一算经》三卷((i)、(ii))。

(4) 李籍《九章算术音义》一卷((i))。

(5) 李籍《周髀算经音义》一卷((i))。

(6) 任弘济《一位算法问答》一卷((i)、(ii))。

(7) 杨锴明《明微算法》一卷((i),(ii)作三卷)。

(8) 《算法口诀》一卷((i),(ii)作《算法口诀》一卷)。

(9) 《算法秘诀》一卷。((i)、(ii))。

(10) 《算术玄要》一卷((i)、(ii))。

(11) 《五曹乘除见一捷例算法》一卷((i),(ii)捷作切)。

(12) 《求一算法》一卷((i),(ii)作三卷)。

(13) 《解注零歌》一卷((i))。

(14) 《算法》二卷(《南痈志》卷十八)。

(15) 《求一算经》一卷(《郡斋读书志》)。

(16) 《应时算法》一卷。

(17) 《算法序说》一卷。

(18) 《乘除算例》一卷。

(19) 《里田要例算法》一卷。

(以上四种均见《秘书省续编到四库书目》)

(20) 中山子《算学通元九章》一卷。

(21) 《乘除算术》一卷(可能与18同为一书)。

(22) 《量田要例算法》一卷(可能与19同为一书)。

(以上三种均见郑樵《通志略》)

(23) 《方圆算经》。

(24) 《方圆益古算经》。

(25) 《曹唐算经》((iv)中有《曹唐算法》可能同为一书)。

(26) 《法算细历》。

(以上四种均见(宋)尤袤《遂初堂书目》)。

(27) 贾宪《黄帝九章细草》九卷((i),(iv)作贾宪《九章》)。

(28) 蒋舜元《应用算法》一卷((iii),(iv)无卷数及作者)。

(29) 《议古根源》(刘益,又见杨辉《算法通变本末》)。

(30) 《益古算法》。

(31) 《算法机要赋》((i)、(ii))。

(32) 《证古算法》。

(33) 《明古算法》。

(34) 《辨古算法》。

(35) 《明源算法》。

(36) 《金科算法》。

(37) 《指南算法》(又见杨辉《算法通变本末》)。

(38) 《通微集》。

(39) 《通机集》。

(40) 《盘珠集》。

(41) 《走盘集》。

(42)　《三元化零歌》（在(ⅰ)中有张祚注《算法三元化零歌》一卷，可能同为一书）。

(43)　《钤经》（祖颐《四元玉鉴后序》说鹿泉石道信著《钤经》）。

(44)　《钤释》。

(以上15种均见（iv））。

(45) 韩公廉《九章钩股验测浑天书》一卷（苏颂《新仪象法要》卷上）。

(46) 贾宪《算法斅古集》二卷（王洙《王氏谈录》）。

(47) 秦九韶《数术大略》十八卷(今称《数书九章》)。

(48) 杨辉《详解九章算法附纂类》十二卷。

(49) 杨辉《日用算法》二卷。

(50) 杨辉《乘除通变本末》三卷，每卷各有名称：上卷《算法通变本末》，中卷《乘除通变算宝》，下卷《法算取用本末》（此卷与史仲荣合著）。

(51) 杨辉《续古摘奇算法》二卷。

(52) 杨辉《田亩比类乘除捷法》二卷。

上列（50）—（52），三种七卷，一般称为《杨辉算书》，均作于1274—1275年间。

(53)　《诸家算法》（李俨有钞本）。

(54) 贾宪《释锁》。

以上是目前所知宋代的数学著作，不论是数量还是质量都远远胜过前代。但其中除4、5、47、48、50—52外，均已失传。

此外还有稍早一点的几种数学作品，即敦煌千佛洞所藏的《算书》（现藏巴黎）、《算表》（作于952年，现藏巴黎）、《算经》三种（均有序，均残，一种现藏巴黎，两种现藏伦敦）、

《立成算经》一卷（现藏伦敦），国内有影摄本①。这儿种书的内容都比较浅显，多系算术问题，包括地亩计算、乘法口诀、度量衡单位换算等。

3．数学发展的特点。从北宋到元代前期，我国的数学发展达到了高峰，在世界数学史上也大放异彩。如果说由赵君卿、刘徽开始到王孝通的三四百年间，几何得到高度发展，大体上形成了以几何为中心的时期，而宋元时的高峰则基本是以代数为中心的时期。当时关于高次方程的近似解法、多元一次方程组解法、高阶等差级数、组合数学、半符号式记法，还有属于数论的同余式组的解法等等，都达到了当时世界最高水平。当然在几何或其它方面也有一些新的成就，但都不如代数水平高。

从数学思想和地区来看似乎是这样：北宋时期的数学在全国大体上形成一体，有些新的思想如天元术（半符号式代数）等已经萌发于太行山一带。到南宋和金对峙时朝，由于南北文化交流有所减少，因此形成了不同的特点。天元术在北方得到很大发展，而在南方简算法、方程解法和同余理论发展很快。到元代统一全国时，南北两方的数学汇合在一起，再加上当时一些其它新因素，我国数学再次出现高潮。

数字方程解法的成就

北宋时期在数学方面的一项突出成就，是杰出的数学家贾宪和刘益建立了数字方程的近似解法。

1．贾宪和刘益的生平。贾宪是十一世纪前期著名天文学

① 李俨：《中国古代数学史料》，1954，第22—39页。

家楚衍的学生，楚衍对于古代数学著作如《九章算术》、《海岛算经》、《缀术》、《缉古算经》等“尤得其妙”，并长期在国家的天文台工作。他有两名弟子，一名叫朱吉，后来担任太史，也在天文台工作；另一名就是贾宪，在朝廷里做左班殿直（低级武官）。贾宪对数学进行了深入研究，“运算亦妙，有书传于世”①。现在所知道的，贾宪有三部数学书，即《算法斅古集》、《黄帝九章细草》和《释锁》，可惜都已失传。上述第二种既以“九章”为名，估计很可能和《九章算术》差不多，应按问题的性质分为“方田”、“粟米”等九部分，每部分为一卷。大概是对于每一问题的解法进行了详细演算，写成“细草”加在书上。但是贾宪的“细草”并不是一般的演草、而是带有创造性的成果。这本书的部分内容在南宋杨辉的著作中被引用，得以保存到现在。

刘益的生活年代很难确定。杨辉说他是中山（今河北省定县）人。有人据政和三年（公元1113年）定州升为中山府，即认为刘益大概是1113年以后的人。②这种说法不一定可靠，实际可能与贾宪同时，甚至稍早。③

在贾宪和刘益的时代，数学已经积累了不少有关方程的问题和开方问题。上节所讲的王孝通的三次方程就是典型例子。贾宪和刘益各自把这类问题进行了搜集和整理，在前人的基础上取得了新的成就。

---

① 王洙：《王氏谈录》。

② 钱宝琮：《增乘开方法的历史发展》，载《科学史集刊》，第2期（1959），第126—143页。

③ 李迪：《简评〈中国数学史〉》，载《科学通报》，1965年11月号，第994—998页。

2．贾宪的"增乘开方法"。贾宪对数学的首要贡献是建立了一种开高次方的新方法——"增乘开方法"。在杨辉《详解九章算法》所附的"纂类"中，录有"贾宪立成释锁平方法"、"增乘开平方法"和"贾宪立成释锁立方法"、"增乘开立方法"，同时还详细抄录了解法步骤。因此可以确切地知道贾宪的两种开方法——"立成释锁开方法"和"增乘开方法"的具体内容。"立成释锁开方法"本质上和《九章算术》中的开方法相同，"增乘开方法"较简捷，有创造性。古代开方实际上相当于求二项方程 $x^n-A=0$ 的一个正根，其中A叫做"实"，x^n 的系数"1"叫做"下法"（有时也叫"隅"），相当于《九章算术》中的"借算"。开方过程中把 $x^n-A=0$变为一般n次方程。贾宪把新方程一次项系数叫做"方"，有时也叫"廉"，一般地说n次项和一次项之间各项的系数都叫"廉"。在贾宪的方程中只有二次的和三次的，因此算筹分别摆成实、方、下法三层和实、方、廉、下法四层。

增乘开方法的特点是：议得每位商之后，先以商乘下法，再"入方"，即把乘得的积加入"方"内。这样，每议得一位商数，就要乘一次加一次，随乘随加。贾宪说："以商乘下法，递增乘之。"这就是"增乘开方法"一词的由来。每求得一位商数，实际上要进行一次代换，再求下一位商数时，前面的商数就暂时不管了。下面以 $x^2=71824$ 或 $x^2-71824=0$ 为例说明"增乘开方法"的具体步骤（以阿拉伯数码代筹式）：

	商
71824	实
	方
1	下法

（1）

未开方前的原式。

2	商
31824	实
4	方
1	下法

（2）

将下法"1"移至7下，上商议得2。以商2乘下法为"平方"，再以商2乘平方与实相减得31824。又以商2乘下法入平方。（2）

2	商
31824	实
4	廉
1	下法

（3）

将方"4"向右移一位为廉，下法向右移两位。（3）

26	商
4224	实
52	廉
1	下法

（4）

议得第二位商为6，以商6乘下法，为隅，入廉得4600，再以6乘廉得27600，与实相减得4224。又以商6乘下法入廉得"52"。（4）

26	商
4224	实
52	廉
1	下法

（5）

将廉向右移一位，下法向右移二位。（5）

268	商
	实
528	廉
1	下法

（6）

议得第三位商为8，以商8乘下法为隅，入廉得528，再以8乘廉得4224，与实相减恰尽。（6）

这个步骤，如以现代形式来解释，就是：首先进行线性变换：$x=100x_1$，则原方程变为

$$10000x_1^2-71824=0$$

第一位商数在2、3之间，上商2（实为200），进行代换 $x_2=10(x_1-2)$，有

$$100x_2^2+4000x_2-31824=0$$

又议得第二位商数在6、7之间，上商6（实为60），进行代换 $x_3=10(x_2-6)$，有

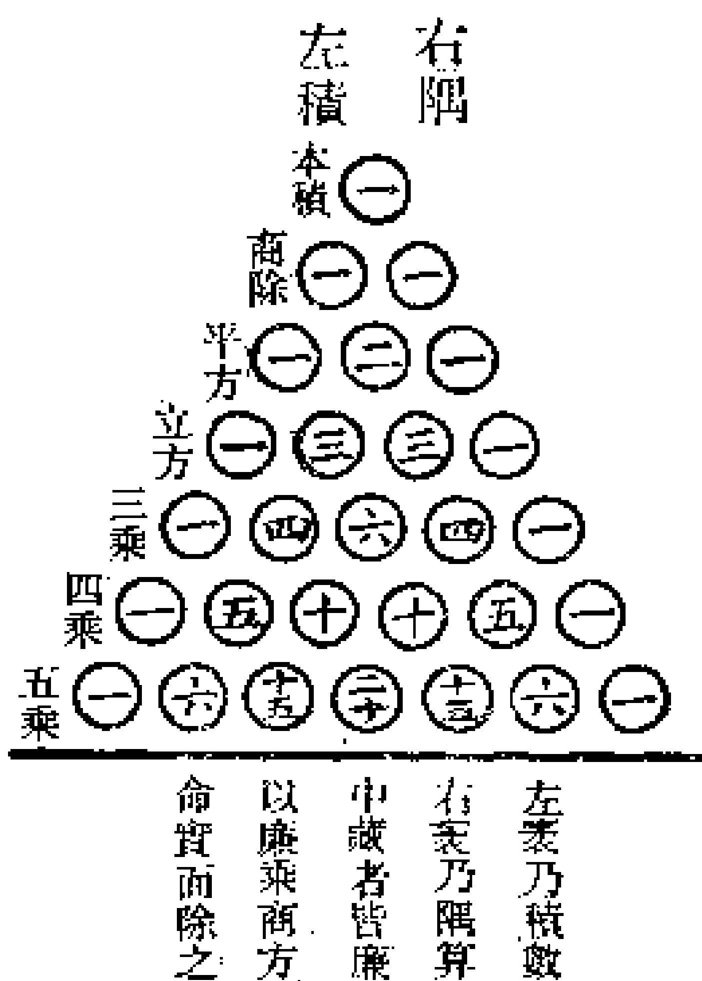
$$x_3^2+520x+4224=0$$

又议得第三位商数在8、9之间，上商8，恰尽，故有

$$x=2\times100+6\times10+8=268$$

为所求之商。

这方法可用于开三次或三次以上的任意次方。意大利数学家鲁菲尼（P.Ruffini，公元1765—1822年）于1804年和英国数学家和涅（G．Horner，公元1786—1837年）于1819年各自独立建立的求解数字高次方程近似根的方法，其演算步骤与贾宪的基本相同，但却晚了七百多年。



2—18　"开方作法本源"

3．贾宪的"开方作法本源"图。贾宪解方程时，反复地遇到二数和的任意次方的展开问题，因而他发现展开后的系数规律，造了一张数表，叫做

“开方作法本源”（图2—18），包括相当于由0次到6次的二项式展开式的全部系数。这些展开式用现代数学符号表示就是：

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

展开式和系数表还可以继续往下造。从展开式中又看出其规律性：表中间的每一个数都是它肩上两数之和。如四次展开式中的“6”，是由三次展开式的3加3得来的等等。这种作法可用$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$表示。

```
                  1
                1   1
              1   2   1
            1   3   3   1
          1   4   6   4   1
        1   5  10  10   5   1
      1   6  15  20  15   6   1
```

有了“开方作法本源”图就能够把任何次的二项式展开。

这是数学上的一项重要发现。杨辉明确地说：这个图“出释锁算书，贾宪用此术”，就是“开方作法本源”图是贾宪创造的，载于《释锁》这本数学书中。为简化起见，我们可以把此图叫做“贾宪三角形”。以前有人称它为“杨辉三角”是不够妥当的。

贾宪的成就有世界意义。国外最早研究此种系数规律的是中亚数学家阿尔·卡西（Al-Kâshi），他的研究成果于1427年发

表，比贾宪晚了三四百年。在欧洲，人们称它为“帕斯卡三角形”。帕斯卡（B.Pascal,1623—1662年），十七世纪法国科学家。他确实造过这种“三角形”，可是在他以前，十六世纪德国的阿披亚奴斯(Apianus)也曾造过。但都在贾宪之后。

遗憾的是，载有“开方作法本源”图的杨辉的《详解九章算法》现已不在我国。原来杨辉算书的部分内容已被收入明初编写的巨篇《永乐大典》中，而杨辉原著已不存在。清末，英国侵略者把《永乐大典》掠夺去许多册，其中恰好包括“开方作法本源”图的那一册，现仍藏于剑桥大学图书馆。

4．刘益方程解法的成就。刘益的数学著作《议古根源》载有二百道数学问题及其解法，其中大部分都是求方程的根。在刘益以前的方程大都有一定的限制，首项系数是正的而且是“1”，贾宪所研究的也不例外。刘益第一个在这方面进行了推广。例如在他研究的问题中有相当于$7x^2=9072$，$-5x^2+228x=2592$等方程，特别是他研究了一个四次方程$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$，这在我国数学史上是少见的。

刘益的方程没有什么条件限制，首项系数可正可负，同时次数可以带有任意性。杨辉对这些方程赞不绝口。他在《算法通变本末》中说：“刘益以勾股之术，治演段锁方，譔（撰）《议古根源》二百问，带益隅开方，实冠前古。”特别指出了“带益隅开方”(解首项系数为负的方程)是前所未有的，是刘益的新创造。因此，他对刘益的工作有意进行传播，“辉（杨辉）择可作关键题问者，重为详悉著述，推广垂训刘君（刘益）之意”，从《议古根源》的二百个问题中选择了二十二个有代表性的问题写入自己的《田亩比类乘除捷法》一书中，一直保留到现在。因为《议古根源》已经失传，所以杨辉书中的

资料就成为研究刘益的主要依据了。

刘益对方程解法的成就是他倡用了“益积术”和“减从术”两种方法。在解四次方程时用的是“增乘开方法”。下面举例说明“益积术”和“减从术”的内容。

解方程 $x^2-12x=864$时，经观察，商为两位数，十位数应在3、4之间，故设 $x_1=x-30$，变原方程为

$$(x_1+30)^2-12(x_1+30)=864$$

或　$$x_1^2+2\times 30x_1-12x_1=864+12\times 30-30\times 30=324$$

即　$$x_1^2+48x_1=324$$

又经议得商的个位数应有 $x_1=6$，代入恰尽，故 $x=x_1+30=36$。

在这个解法中，先把原方程变换，将所得常数移至右端，把360加到“积”上，然后减去900，得324。所谓“益积”就是指由“积”(864+360)减去900，古代有“损之曰益”的说法，“益积”是“减积”的意思。这就是刘益的“益积术”。

上面的解法，经变换后把常数移至右端。将常数变形为 $864-(30-12)30=864-540$。这就叫“减从”，即从“隅”30减去“从法”12。“减从术”就是这个意思。

“减从术”与贾宪的增乘开方法略有不同。可是刘益在解四次方程 $-5x^4+52x^3+128x^2=4096$ 时所用的方法就和增乘开方法完全一致了。值得注意的是，刘益的方程是一般的四次方程，首项系数既是负的，又不是“1”，可以说是在解数字方程方面的一个很大突破。

沈括的数学研究

沈括（公元1030—1094年）是我国历史上一位杰出的科学

家。他多才多艺，在当时各学科领域内都取得了重要成就。沈括虽然出身于名门望族，本人又在北宋朝廷里做过官，但是比较接近下层，注重实际，曾经多次到生产作坊、工地或自然界里进行生产考察和科学考察，不仅掌握了大量第一手资料，而且亲自进行科学实验，从而对劳动人民在改造自然中的伟大作用有一定的认识。他说："技巧、器械、大小、尺寸、黑黄、苍赤，岂能尽出圣人！百工、群有司、市井、田野之人，莫不预焉。"①



沈 括

沈括晚年著有《梦溪笔谈》一书，内容丰富，有关科学技术方面的内容尤为可贵，因此被誉为"中国科学史的里程碑"②。他对数学进行了精深的研究，提出了不少卓越的见解。

1．对数学的正确认识。在沈括的时代，以邵雍、程颐、程颢兄弟等为代表的理学家，提倡所谓"象数学"，给数学披上一层神秘的外衣。生活在这个时代的沈括，虽然不免也受了一些唯心主义思潮的影响，但是他能够提出自己的独到见解，对数学有比较正确的认识。当时，在理学家们看来，数和形等数学概念不过是来源于什么"理"、"道"，甚至"心"等非物

① 沈括：《长兴集·上欧阳参政书》。

② J.Needham（李约瑟），Science and Civilisation in China, Vol.I, 1954,Combridge, P. 135.

质的东西。沈括则认为"天地之变，寒暑风雨，水旱螟蝗，率皆有法"，"大凡物理有常有变"①，还提出"耳目能受而不能择，择之者心也"②等看法，都是正确认识数学的思想基础。他指出：所有物体都呈现一定的形状，有形状就有数量。物体的方圆端斜就是形状，能进行乘除运算的是数量。③就是说，只有客观物质世界中存在的空间形式和数量关系，人们才能在实践中接收到它们发出来的信息，通过思考、加工而认识它们，形成数学概念。

沈括还进一步认识到对于数学方法的使用不能生搬硬套，应当是"见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术"④。因此他把当时的各种简算法加以分析和比较，指出在什么条件下用什么方法。他还举出求一、上驱、搭因、重因和增成等简算法。对前几种算法他指出在计算上"皆不离乘除"，唯独最后一种"都不用乘除，但补亏就盈而已"⑤。实际上，增成法也用乘除，只是一位一乘罢了。如果位数少，这种算法较为简捷，位数多了也很繁琐，因此他认为位数多时还不如用普通乘除法。就是说计算时要根据各种简算法的特点和适用范围灵活运用，不可拘泥。

2．"隙积术"的发明。沈括随时留意各种问题，他在酒店里看到有很多酒坛按一定摆法堆放在那里，棋子也是有类似堆法。用现在的话来说，是这样：每层摆为一长方形，每上一层比下一层长、宽各少一个。假定最下一层长、宽分别为 c 、 d

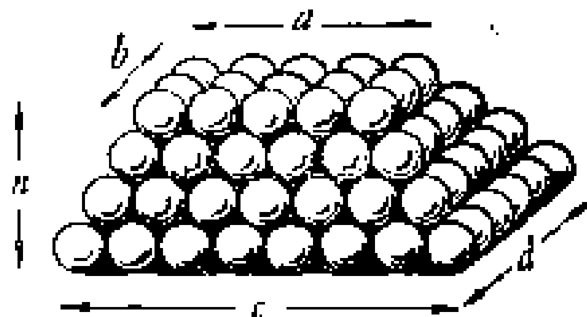
---

①③　沈括：《梦溪笔谈》卷七。

②　沈括：《长兴集·孟子解》。

④⑤沈括：《梦溪笔谈》卷十八。

个，最上一层长、宽各为 a 、b 个，共为 n 层，问总共有多少个酒坛或棋子(图2—19)。如果是实体的台体可以用以前的公式计算，可是这个问题不能用体积公式，因为坛与坛间有缝隙。沈括对前人的各种算法进行了研究，结果发现别的公式都有，“独未有隙积一术”，



2—19　隙积图

“积之有隙者”则不能求。他经过反复研究，得到解决。设 S 为所求之总数，则有公式

$$S=\frac{n}{6}\left[(2b+d)a+(b+2d)c\right]+\frac{n}{6}(c-a)$$

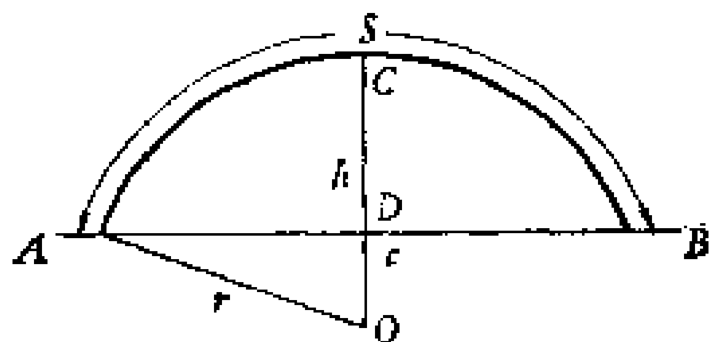
这个公式是怎样求得的，沈括自己没有说明。

“隙积术”公式是正确的。这公式与高阶等差级数有密切关系。沈括假令最上一层为长、宽各两个坛，以下每层长、宽各增一个，于是有 $2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25$，$6^2=36$，…，每后项与其前项之差依次为5、7、9、11、…。再求一次差均得 2，因此各层的个数构成一个二阶等差数列。对于长、宽不等的情况，也有这个性质。沈括的研究可以说是我国研究高阶等差级数（或数列）的开始，对后来影响很大。

3．创立“会圆术”。沈括在数学上的另一成就是创立了“会圆术”。“会圆术”用现代的话来说就是已知弓形的矢(高)和圆的直径求弧长的方法。在这以前还没有人注意到这个问题，沈括是我国数学史上第一个研究弓形的弦、矢和弧之间的关系的数学家，并且求出了计算弧长的近似公式。沈括研究这个问题是由求弓形面积问题引起的。他认为原来求各种形状土地面积的方法可以说“方圆曲直尽矣”，但是“未有会圆之

术”。沈括认为凡是圆形的土地都可以分割成若干部分，求出每一部分的弧长合起来就是一个圆周。“会圆”一词就是这么来的。

要想“会圆”，就必须解决求弧长问题。怎样求弧长？设 r 为圆半径，d 为直径，h 为弓形的高，S 为弧



2—20　会圆图

$\widehat{ACB}$的长度，沈括用到了相当于下面的近似公式：

$$S \approx c + \frac{2h^2}{d}$$

其中 c 是弓形的底（弦）AB 之长，用公式

$$c = 2\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$$

计算。从图 2—20可以看出：这是勾股定理的一个简单应用。

“会圆术”后来在天文学等方面有重要应用。如果进一步考虑“会圆术”还有更深刻的思想，就是当所考虑的圆弧很小的时候，弓形的高 h 很小，h^2 便趋于零。可以认为有 $S \approx c$。这个近似等式说明直曲的互相转化，也是刘徽极限思想的继续。沈括虽未明确提到此点，但我们可做这样的分析。

4．“棋局都数”的计算。下棋与数学的关系很密切，除了对弈双方要运用筹划的思想外，棋局总数的计算也是组合数学问题。我国的围棋，棋盘上画着方格，在格内放棋子，那么棋局总共有多少局面？这个问题看起来很简单，如果棋路多了计算却很复杂。据说唐代的张遂计算过，但是怎么计算的，没有留下记载。沈括对棋局的总数进行了计算，他认为棋路多了，总数大得很，“非世间名数可能言之”，就是已有的数名

都不够用。他从二路开始计算，直到七路：棋盘是二路见方，有用四个棋子的位置，可变出八十一局，即 $3^4=81$。棋盘是三路见方的，有用九个棋子的位置，可变出一万九千六百八十三局，即 $3^9=19683$。一直下去，如果棋盘是七路以上见方的，棋局总数就无法用当时所有的大数名称表达出来。围棋的棋盘一般是十九路，共 $19\times19=361$ 个用子的位置。棋局总数更大到十分惊人的程度。可是，沈括研究出三种计算方法，求出了总数用现在的方法计算约为 $1.74\times(10000)^{43}$。重要的是，沈括在计算中用到了指数法则，如相当于 $a^3\times a^3=a^6$，$a^6\times a^6=a^{12}$，$a^{12}\times a^6=a^{18}$,$a^{18}\times a=a^{19}$，$a^6\times a^3=a^9$ 等等，就是同底两幂相乘其积等于以该底为底，指数相加为指数的幂。

秦九韶和他的《数书九章》

秦九韶（生活于十三世纪前中期），字道古，自称鲁郡人，实际生于四川。公元1224年，他父亲在南宋朝廷里做秘书少监，他也就居于都城临安（今杭州市），因而有机会去太史局（管理天文历法研究的机构）访问研究天文历法的人员，又同“隐君子受数学”，学习天文和数学等自然科学知识。1244年，秦九韶以通直郎为建康府（今南京市）通判，1252年又被调为沿江制置司参议。后来因为参与派系斗争失败，于1260年被贬到梅州（今广东梅县），不久就死在那里。

1．数学杰作《数书九章》。在沈括去世后约一个半世纪，秦九韶于公元1247年完成了重要数学著作《数书九章》一书，标志着当时我国数学的发展已达到高水平。全书十八卷，八十一道应用数学问题，按应用分为九大类，每类包括九道

题，每一大类的题目和基本内容如下：

一、大衍类　一次同余式问题

二、天时类　天文历法和气象中的数学问题

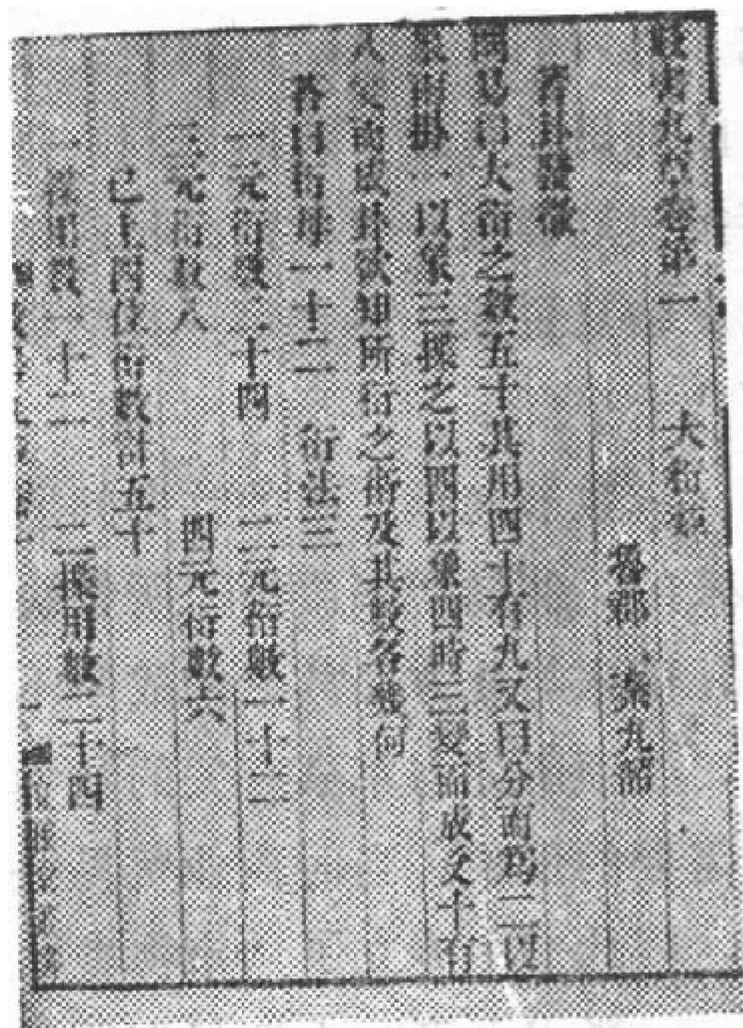
三、田域类　各种田亩的面积计算问题

四、测望类　几何测量问题

五、赋役类　各种赋税的计算问题

六、钱谷类　征购粮食和仓库等数学问题

七、营建类　土木建筑工程中的数学问题


數書九章卷第一　大衍類
魯郡　秦九韶
蓍卦發微
問易曰大衍之數五十其用四十有九又曰分而為二以
象兩掛一以象三揲之以四以象四時三變而成爻十有
八變而成卦欲知所衍之術及其數各幾何
答曰衍母一十二　衍法三
一元衍數二十四　二元衍數一十二
三元衍數八　四元衍數六
已上四位衍數計五十

2—21　《数书九章》书影

八、军旅类　军营、阵形的布置和军需供应等数学问题

九、市物类　商业方面的交易和利息的计算问题。

每道问题都有答案，答案之后有“术”和“草”。“术”是原理和解题的详细步骤。“草”是算草，非常详细，几乎全部过程都有。所用数字符号都是筹码字。还有一些解释和数学概念的定义，例如第一类“大衍类”的第一题答案之后便先定义了“元数”、“收数”、“通数”和“复数”四个概念。“元数”：“谓尾位见单零者”，就是整数；“收数”：“谓尾位见分厘者”，就是小数等。这也许是秦九韶为了以后在概念上明确起见才这样做的。

如果说王孝通在《缉古算经》里所收的问题已经够复杂的

话，那么秦九韶在《数书九章》中所研究的问题则更为复杂。例如"赋役类"第一题"复邑修赋"，计算甲、乙、丙、丁、戊、己六个乡"修赋"问题。六乡按途程远近分为三等，乡与乡间的田地有肥、瘠的差别，每乡的田地又各分为九等，每乡要按田地等级核算单位面积应纳田苗粮数，再折合成布匹数以及应纳夏税数，还有每乡共纳数等等。这一道题光答案就有一百八十个！

《数书九章》中的许多问题，都是根据当时的社会需要提出来的。例如"军旅类"所解决的数学问题与军事有关。那时，南宋与北方民族之间战争不断，为了解决战争中的一些问题，必须研究与军事有关的数学。"军旅类"问题就是这种社会需要的反映。当时商业贸易很发达，典当、借贷之事也很盛行，因此书中专立了"市物类"。

《数书九章》中还保存着其它一些非常有价值的科学史料。例如"天时类"的"天池测雨"、"圆罂测雨"和"竹器验雪"等三题，讲的是量雨器和量雪器问题，这是有关量雨器的最早的明确记载。"营建类"的"计作清台"题有一幅珍贵的《清台图》是我国现存最古的天文台图。

秦九韶研究数学的目的是"以拟于用"，主张"数术之传，以实为体"，是非常可贵的思想。但他又是数学家中第一个提倡"河图洛书"为数学起源的说法，并认为数学和"道"有同一个"本"（根源）。这"本"就是《易经》。他又从《易经》中引来"大衍"二字，冠于同余式及解法上，命名为"大衍求一术"。这些事实说明，秦九韶接受了较多的道学思想。《数书九章》是一部不可多得的优秀数学著作，曾引起国

际上的重视①。

2．“大衍求一术”。在本章第二节曾介绍了有名的“孙子定理”，并提到它的推广。这种推广是由秦九韶完成的。《孙子算经》以后，这个问题在民间流传很广，并且给它取了各种各样有趣的名称，如“秦王暗点兵”、“韩信点兵”、“鬼谷算”等。十九世纪以后，欧洲人把这问题叫做“中国剩余定理”。

《孙子算经》的“物不知数”题，数字都很简单，用试验的方法就可以得出答案。如果数字较大，同余式的个数又多，凭猜测试验就不能解决问题了。这种一般性的一次同余式组的科学解法，是由秦九韶首先解决的。

把“物不知数”问题改变一下形式，将除得的余数2、3、2分别用r_1、r_2、r_3表示，除数3、5、7分别用p_1、p_2、p_3表示，就有：

$$\begin{cases} N \equiv r_1 (\bmod p_1) \\ N \equiv r_2 (\bmod p_2) \\ N \equiv r_3 (\bmod p_3) \end{cases}$$

解法也随之变成：

$$N = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105p \quad (p\text{为整数})$$

这里的$105 = 3 \times 5 \times 7$，就是那三个除数3、5、7的乘积。以$M$表示这个积，那么70、21、15相当于$2 \times \frac{M}{p_1}$、$1 \times \frac{M}{p_2}$、$1 \times \frac{M}{p_3}$，用$k_1$、$k_2$、$k_3$分别代表2、1、1，就有$k_1\frac{M}{p_1}$、$k_2\frac{M}{p_2}$、$k_3\frac{M}{p_3}$。把这个问

① 例如比利时的李培始（U. Libbrecht）写了一部有关《数书九章》的专著，叫做《十三世纪的中国数学》，（Chinese Mathematics in the Thirteenth century，1973，London），共有555页。

题推广到一般情形，设 p_1、p_2、…、p_l 为两两互素[①]的除数，r_1、r_2、…r_l 为 l 个余数，$M=p_1p_2$、…p_l，就有下面的同余式组：

$$\begin{cases} N\equiv r_1(\text{mod}p_1) \\ N\equiv r_2(\text{mod}p_2) \\ \cdots\cdots \\ N\equiv r_l(\text{mod}p_l) \end{cases}$$

解法可用下式表示：

$$N=k_1\frac{M}{p_1}r_1+k_2\frac{M}{p_2}r_2+\cdots+k_l\frac{M}{p_l}r_l-pM$$

问题的关键在于使这些 k_1、k_2、…k_l 分别满足同余式 $k_1\frac{M}{p_1}\equiv 1(\text{mod}p_1)$、$k_2\frac{M}{p_2}\equiv 1(\text{mod}p_2)$、…$k_l\frac{M}{p_l}\equiv 1(\text{mod}p_l)$。

如果 $p_i(i=1,2,\cdots l)$ 不是两两互素，秦九韶已经知道将它们化为互素，计算步骤相当繁琐，这里不讲了。

秦九韶的主要贡献，就是解决了 $k_i(i=1,2,\cdots l)$ 的具体求法。他的求法是：先由 $\frac{M}{p_i}$ 累减 $p_i(i=1,2,\cdots l)$，直到余数 $G<p_i$ 为止，这时有 $G\equiv\frac{M}{p_i}(\text{mod}p_i)$。然后，他用辗转相除法求出 k_i。具体求法是：

$$\begin{aligned} p_i &= Gq_1+r_1 & k_1 &= q_1 \\ G &= r_1q_2+r_2 & k_2 &= q_2k_1+1 \\ r_1 &= r_2q_3+r_3 & k_3 &= q_3k_2+k_1 \\ r_2 &= r_3q_4+r_4 & k_4 &= q_4k_3+k_2 \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n+r_n & k_n &= q_nk_{n-1}+k_{n-2} \end{aligned}$$

① 两两互素是指几个整数中，每两个的最大公约数都为1。

最后的 r_n 等于 1 时，就不再往下计算了，这时 k_n 就是所求的数。k_n 是 k_i 中之一，两个脚码不是一回事，不可混淆。所谓“求一”就是指求到 $r_n=1$，这就是有名的“大衍求一术”。

3．数字高次方程的近似根求法。秦九韶在数学方面的第二项重大成就是关于高次方程的近似根求法。贾宪创造了增乘开方法，而刘益方程的首项系数已不限于“1”，也不限于正数。秦九韶再次对这个问题进行了研究。《数书九章》已有各次的一元高次方程的一般形式，最高次数已经达到十次。可以说，在秦九韶看来，方程的次数已没有任何限制，随便多少次都行。这是代数学史上的一项重要成就。过去的方程，由于来源于长度、面积之类的问题，所以总是把常数项规定为正。如用现代符号表示，常数项就写在等号的右边，而秦九韶则规定“实常为负”，即常数项为负数，于是可以写在左边，其它各项的系数可正可负，没有限制。

秦九韶解任意高次数字方程的步骤和贾宪、刘益的步骤基本一致，也是在议得根的每位数后都要随乘随加。他的筹算式也分若干层，在未求出根以前，最上层为“实”，就是常数项，最下一层为“隅”，就是首项系数，实下为“方”就是一次项的系数，其余各项的系数称为“廉”，比如在四次方程中，二次项的系数为“上廉”,三次项的系数为“下廉”。对方程各项的系数的正负或缺项，秦九韶都有规定的称呼，缺项用“虚”字表示，正数前面加一个“从”字，负数前面加一个“负”字。首项系数是负的则加一个“益”字，叫“益隅”。而常数项他规定为负数，数字前不加区别正负的符号。下面以《数书九章》卷五“尖田求积”题“开翻法三乘方”为例，说明秦九韶求高次方程近似根的方法。他的原式如下面的形式，

用现代符号表示就是：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

然后，用二十个这样的式子依次进行计算，求得 $x=840$，恰尽。这是方程的一个准确正根。其具体解法步骤可以简化，一般用七步即可①，连上式在内共八式。为了便于阅读，把原式中的筹码改为阿拉伯数码，列式如下：

商〇实
≡〇⊤⊥‖⊥⊤〇〇〇〇
虚方
从上廉
⊥⊤≡‖〇〇
虚下廉〇
|益隅

（1）

	0	商
(−)	4 0 6 4 2 5 6 0 0 0 0	实
	0	虚 方
(+)	7 6 3 2 0 0	从上廉
	0	虚下廉
(−)	1	益 隅

这是由上式改成的未求根前的原形，如图（1）。

① 钱宝琮：《增乘开方法的历史发展》，《科学史集刊》，第2集（1959），第126—143页。

（2）

	800	商
(−)	40642560000	实
	0	方
(+)	763200	上廉
	0	下廉
(−)	1	益隅

把“上廉”向左移四位，“益隅”向左移八位，经初步考虑，得根的最大一位数8，即“上商八百为定”。放在百位上，如图(2)（秦氏原书上的第三式）。

（3）

	800	商
(+)	38205440000	正实
(+)	98560000	方
(+)	123200	上廉
(−)	800	下廉
(−)	1	益隅

“以商生（乘）隅”得 $-800\times(100)^3$，“入益下廉”，再“以商生下廉，消从上廉”，即 $8\times(-800(100)^2)+763200\times(100)^2=123200(100)^2$ 为上廉。“以商生上廉，入方”，即把 $8\times123200(100)^2=985600\times(100)^2$ 加到“方”上。“以商生方，得正积，乃与实相消”就是

$$8\times9856000000$$
$$-40642560000$$
$$=38205440000$$为新正实。“以负实消正积，其积乃有余，为正积”。如图(3)（秦氏的第八式）。

（4）

800	商
(+) 3820544 0000	实
(−) 826880000	方
(−) 1156800	上廉
(−) 1600	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即$8\times(-100(100)^3)+(-800(100)^3)=-1600(100)^3$。"以商生下廉，入上廉内，相消"即得$-1156800(100)^2$。"以正负方相消"，即以8乘上廉和原有的方相消得$-826880000(100)$，如图（4）(秦氏的第十三式)。

（5）

800	商
(+) 38205440000	实
(−) 826880000	方
(−) 3076800	上廉
(−) 2400	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即$8\times(-100(100)^3)+(-1600(100)^3)=-2400(100)^3$。"以商生下廉，入上廉"，算得负上廉为$-3076800(100)^2$。如图（5）(秦氏的第十五式)。

（6）

800	商
(+) 38205440000	实
(−) 826880000	方
(−) 3076800	上廉
(−) 3200	下廉
(−) 1	益隅

"以商生隅，入下廉"，即以8乘益隅，加入下廉，得$3200(100)^3$。如图（6）(秦氏的第十六式)。

（7）

8 4 0	续商
（+）3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	实
（−）8 2 6 8 8 0 0 0 0	方
（−）3 0 7 6 8 0 0	上廉
（−）3 2 0 0	下廉
1 （−）	益隅

把"方"向右退一位，上廉退二位，下廉退三位，隅退四位，议得"续商四十"。如图（7）（秦氏的第十七式）。

（8）

8 4 0	商
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	实
（−）9 5 5 1 3 6 0 0 0	方
（−）3 2 0 6 4 0 0	上廉
（−）3 2 4 0	下廉
（−）1	益隅

以续商4乘隅，加入下廉内得$-3240(10)^3$。再以"商生下廉，入上廉内"，得$-3206400(10)^2$，"以商生上廉，入方内"，得$-955136000(10)$。最后以4乘方，和正实相消，"适尽"。840为所求之根。如图（8）（秦氏的第二十一式）。

上面的计算步骤相当于：首先对（1）进行变换，即设$x=100x_1$，原方程变为

$$-(100)^4x_1^4+763200\times(100)^2x_1^2-40642560000=0$$

这就是（2）式。议得根的第一位数为8，进行代换 $x_2=x_1-8$，经计算得

$$-(100)^4x_2^4-3200\times(100)^3x_2^3-3076800\times(100)^2x_2^2$$
$$-826880000\times(100)x_2+38205440000=0$$

此为（6）式。式（7）中的各项系数是由（6）经"退位"而得，实际上就是由变换$x_3=10x_2$得到的，它的现代形式是

$$-(10)^4x_3^4-3200\times(10)^3x_3^3-3076800\times(10)^2x_3^2$$
$$-826880000\times(10)x_3+38205440000=0$$

“续商” 4 （实为40），则原方程变为

$$-(10)^4x_3^4-3240\times(10)^3x_3^3-3206400\times(10)^2x_3^2$$
$$-955136000\times(10)x_3=0$$

常数项已消去就是（8）式，恰尽4，于是

$$x=100x_1=100(8+x_2)=100\left(8+\frac{x_3}{10}\right)=840。$$

这就是所求的一个根。

前边计算中的$(100)^3$、$(100)^2$……是变换的系数，筹式上不写出。

从这个例题可以看出：秦九韶的解法与贾宪“增乘开方法”一致，但已能解任意次方程。

4．线性方程组解法及其它。秦九韶在《数书九章》中有些问题相当于解线性方程组，一般地说数字都很大，也很复杂。原来《九章算术》解这种问题用“直除法”，刘徽曾有改进，但影响不大，后来人们仍用“直除法”解线性方程组。秦九韶作了彻底改进，一直采用互乘相消法。特别值得提出的是他在解题中用到相当于增广矩阵的初等变换，只要把秦九韶的原式稍加改变，加上矩阵符号即可。现以《数书九章》卷十七“均货推本”题为例说明秦九韶解线性方程组的具体步骤。以下是这道题的一部分。

甲、乙、丙、丁四人合伙购买沉香五千八十八两、胡椒一万四百三十包（每包四十斤）、象牙二百一十二合（每合重量相等）。甲有本金二百两、盐四袋、钞① 一十道，乙有本银八

① 钞相当于现在的纸币。

百两、盐三袋、钞八十八道，丙有本银一千六百七十两、度牒①一十五道，丁有本度牒五十二道、金五十八两八铢②。以上共估值四十二万四千贯。问甲金、乙盐、丙银、丁度牒各合多少贯文和每人本钱合多少贯。

需要说明的是题中的盐和钞的关系，秦九韶在演草中写着"以四袋乘钞一十道，得四十袋"，就是甲钞一道折盐四袋，即相当于在他本中有四十袋盐，又"乙钞八十八道，以三袋乘之，得盐二百六十四袋"，就是乙钞一道折盐三袋，即相当于在他本中有盐二百六十四袋。因此，在他的计算中不再有钞，全由盐代替。秦九韶先把总估值424000贯用四人均分各得106000贯，计算时筹码写作："|〇T〇〇"，省去一位，下加"十贯"两字。他列成筹算式，然后进行演算，于是有一系列筹算式，并且各有名称，第一个叫"首图"，以下依次为"次图"、"定率图"、"维图"等等。每个图相当于一个增广矩阵。头两个图如下：

左行	次行		副行	右行
|〇T〇〇 十贯 金 [illegible] 度牒 [illegible]	|〇T〇〇 十贯 银 [illegible] 度牒 [illegible]	首图	|〇T〇〇 十贯 盐 [illegible] 银 [illegible]	|〇T〇〇 十贯 金 [illegible] 盐 [illegible]
[illegible]〇〇 十贯 金 [illegible] 度牒 [illegible]	|〇T〇〇 十贯 银 [illegible] 度牒 [illegible]	次图	—〇T〇〇 十贯 盐 [illegible] 银 [illegible]	|〇T〇〇 十贯 金 [illegible]

① 度牒相当于现在的汇票。
② 铢是一种重量单位，等于一两的二十四分之一。

上两个图相当于以下两增广矩阵：（“首图”第四行“金☰Ⅱ”后还应有分数三分之一，原书未写）

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 200 & 10600 \\ 0 & 800 & 264 & 0 & 10600 \\ 15 & 1670 & 0 & 0 & 10600 \\ 52 & 0 & 0 & 58 & 10600 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 200 & 10600 \\ 0 & 800 & 264 & 0 & 10600 \\ 15 & 1670 & 0 & 0 & 10600 \\ 156 & 0 & 0 & 175 & 31800 \end{pmatrix}$$

很显然，第二个矩阵是由第一个矩阵的第四行乘以3而来。

设度牒每道值钱x文，银每两y文，盐每袋z文，金每两w文，则“首图”相当于由下列线性方程组的系数和常数项所构成：

$$\begin{cases} 40z+200w=10600 \\ 800y+264z=10600 \\ 15x+1670y=10600 \\ 52x+58w=10600 \end{cases}$$

（10600下应有“十贯”，今省去。）

秦九韶继续进行计算（实即进行变换），最后得“终图”

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 480000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 250000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 50000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1500000 \end{pmatrix} \text{相当于答案：} \begin{cases} x=1500000 \\ y=50000 \\ z=250000 \\ w=480000 \end{cases}$$

秦九韶的工作已有了矩阵的萌芽。矩阵在外国是十九世纪才建立起来的。

此外，秦九韶还解决了“三斜求积”问题，即已知三角形的三边求其面积。他假定三角形三边为13步、14步、15步。虽是特殊的，但解法具有一般性，设a、b、c为三边，S为面积，秦九韶的步骤相当于下面的公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$$

这和古希腊的“海伦公式”

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

是等价的。此公式在阿拉伯、印度也曾出现过①。

总之，秦九韶根据当时社会提出的各种数学问题进行了刻苦钻研，做出了重要贡献。

数学教育家杨辉

宋代数学在向高深发展的同时，简算法、数学口诀、纵横图、初等级数等也得到了很大的发展和普及。当时有些人从事数学教育和普及工作，收到很好的效果。南宋末的数学家和数学教育家杨辉可为这方面的代表人物。

1. 杨辉的数学教育和普及工作。杨辉，字光谦，南宋末（十三世纪后期）钱塘（今杭州市）人。大概在某地做过地方官吏，因此当时有人说他“以廉饬己，以儒饰吏”②。他一生大部分时间可能是在杭州度过的，在他的著作中引有《台州量田图》，也许到过台州（今浙江省临海县）。杨辉特别注意当时社会上有关数学计算方面的问题，他对度量衡的使用也很关心，所以他在书中有“辉伏睹京城见用官斛号杭州百合，浙郡一体行用”。说明当时浙江各地都使用南宋政府颁发的“官

① 李迪：《“海伦公式”的历史》，载《数学通报》，1962年7月号，第42—43页。

② 陈几先：《日用算法序》。

斛”，叫做“杭州百合”①。

杨辉是当时东南一带有名的数学家，他走到哪里都有人请教数学问题。他到姑苏(今江苏省苏州市)的时候，就“有人求三七差分，继答之”②。

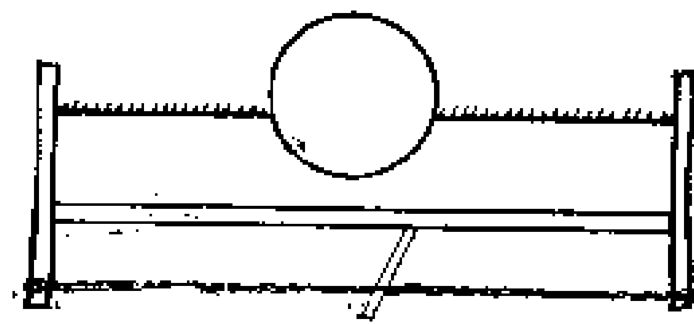
杨辉结合自己的工作，搜集和阅读了大量的数学著作，进行研究，从1261到1275年先后编成数学书五种二十一卷，即《详解九章算法》十二卷(1261)、《日用算法》二卷（1262)、《乘除通变本末》三卷（1274）、《田亩比类乘除捷法》二卷（1275）和《续古摘奇算法》二卷（1275）。他所编写的数学书，内容多数较浅显，可能都是为了教学用的。他认为《九章算术》是一部数学经典著作，但不宜于初学，因而加以详解、改编：“今首以乘除加减为法，称斗尺田为问，编诗括十三首，立图草六十六问”，“凡题法解白不明者，别图而验之；编乘除之术，以便入门”，又对原书的问题作了“题解”和“纂类”，这样便可“以通俗务”，起到普及的作用。

杨辉写的数学书，一般都是由浅入深的。他把《九章算术》按难易重新“分别门例，使后学周知”，编成“纂类”附于他的《详解九章算法》之后。“纂类”的分法是：乘除、分数、比例、比例配分等等，这样适于初学。在教学中，杨辉特别注意循序渐进，总是由最简单的算法开始，逐步接触比较复杂的内容。

杨辉书中所选取的例题大都是日常所用的问题。他还特地写了《日用算法》一书，专讲日常所用的数学。其中由浅入深

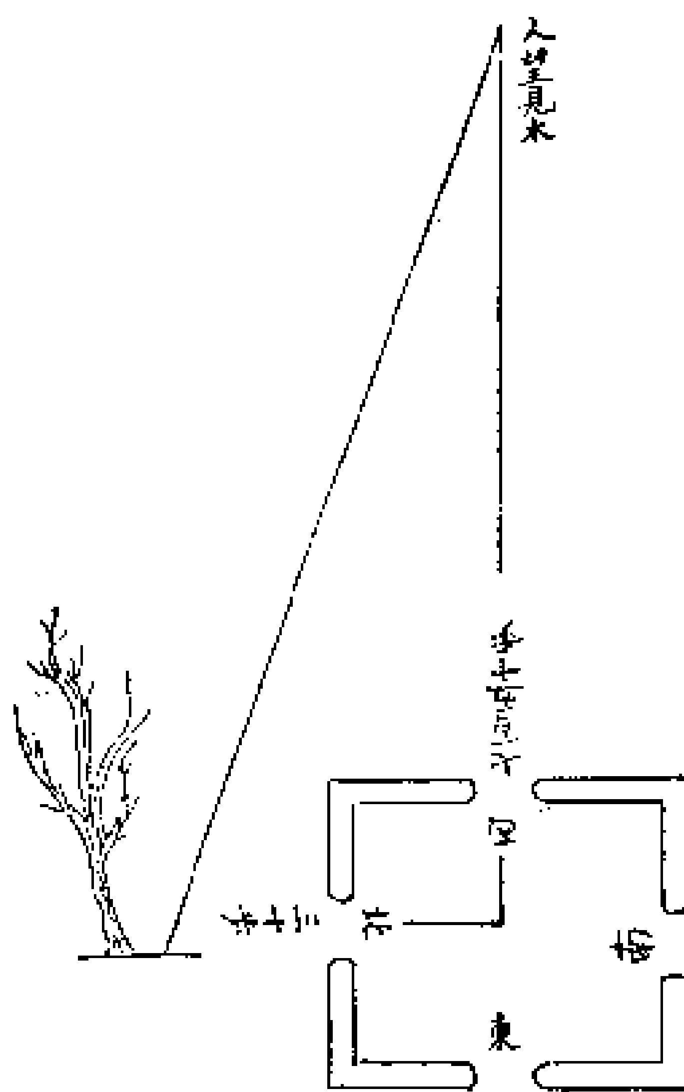
① 杨辉：《续古摘奇算法》卷上。
② 同上，卷下。

地讲了九九口诀、算术四则运算、日用度量衡、土地丈量、堆垛、修建和商品交换等民间常用的问题。



2—22《详解九章算法》插图

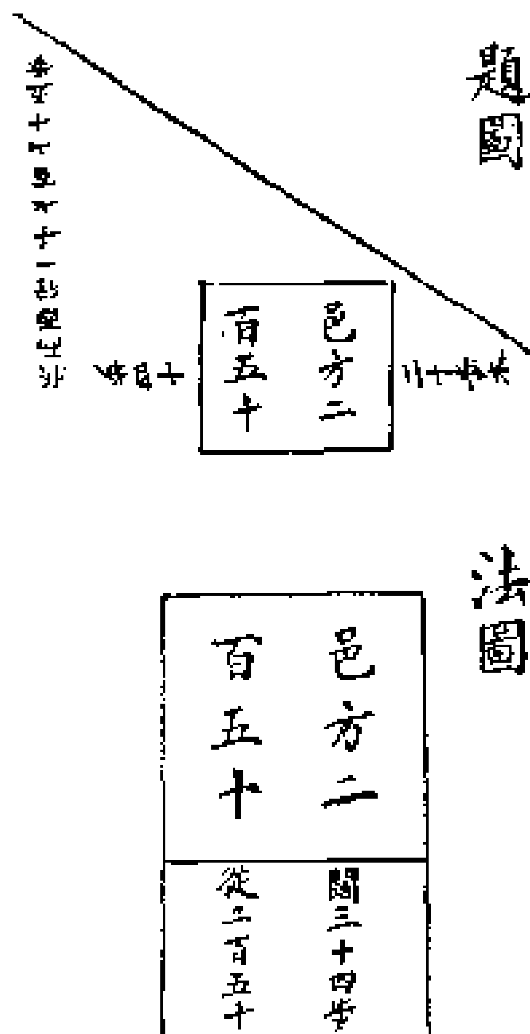
杨辉在书中，还画了许多图形。其中有些已经失传了。例如在《详解九章算法》书前，他补画了一卷图形，据《算法通变本末》卷上说“列图于卷首”。现在卷首无图，原图大概失传了。从书中留下的插图来看，有些图画得很生动，如“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长尺，问径几何”题，画了一个锯和一个圆圈，表示圆材的横截面（图2—22），锯的图形也很珍贵。还有“今有邑，方不知大小”一题，也画了一幅图：一个正方形的“邑”，有东、西、南、北四个门，北门外有一棵树(图2—23），一看就会理解题意。此外，有的题目，不仅有“题图”，而且还有“法图”，例如另一道“今有邑，方不知大小”题，画了下面(图2—24）这样两幅图。杨辉的这种做法，在同时代的其它数学书上很少见。



2—23　《详解九章算法》插图

杨辉很注意讲清题意，处处为学习的人着想。要学习者“全要认题之主意”，这样就可以避免由于误解题意而弄错。他在《详解九章算法》一书中加了“解题”一项，先解释问题的性质，然后再讲解题的原则和演算过程。

在《乘除通变本末》卷上开头有一篇“习算纲目”，是一份珍贵的古代数学教学计划，可以说是杨辉多年从事数学教育工作的经验总结。“纲目”的开头是“先念九九合数”。杨辉主张“自小至大”地由“一一如一，至九九八十一”的学习九九口诀。我国古代，九九口诀的次序是颠倒的，是由“九九八十一”开始的。故有“九九”之称。这不符合人的认识规律，大概到南宋初，才恢复了这样的次序，当时被称为“俗语算术”①。此后，在数学著作中再也不见有“自大至小”的逆序九九表了。



2—24　《详解九章算法》插图

杨辉在“纲目”中对每种新内容学习之后都安排了“温习”。根据内容的难易安排时间，同时还指定了参考书。

2. **数学诗歌。**杨辉在《日用算法》的自序中提到“编诗括十三首”，这是为了便于初学者而编的。可惜这些数学诗都已失传。后来虽然有人引用，可是也没有指明出处，所以很难知

① 洪迈，《容斋续笔》卷六。

道它们的真实情况。在《乘除通变本末》卷中有“求一乘”和“求一除”诗各一首，合辙押韵，而且不失数学意义。

“求一乘”诗括：

五六七八九，　倍之数不走，
二三须当半，　遇四两折扭。
倍折本从法，　实即反其有，
用加以代乘，　斯数足可守。

“求一除”诗括：

五六七八九，　倍之数不走，
二三须当半，　遇四两折扭。
倍折本从法，　为除积相就，
用减以代除，　定位求如旧。

这本书中还有一首“九归”诗，五言四句：

归数求成十，　归除自上加，
半而为五计，　定位退无差。

每句下有九归口诀，杨辉曾说“以古句今注两存之”。可见这首诗不是他作的，而口诀则出自他的手笔，因此他叫做“九归新括”。

杨辉书中有许多歌诀，便于记忆，容易推广。例如两位除数的除法歌诀，“八十三归”歌诀就是以83为除数的除法，如下

见一下十七　$\frac{100}{83}=1+\frac{17}{83}$,

见二下三十四　$\frac{200}{83}=2+\frac{34}{83}$,

见三下五十一　$\frac{300}{83}=3+\frac{51}{83}$,

见四下六十八　$\frac{400}{83}=4+\frac{68}{83}$，

见四一五作五　$\frac{415}{83}=5$。

又如"六十九归"歌诀：

见一下三十一　$\frac{100}{69}=1+\frac{31}{69}$，

见二下六十二　$\frac{200}{69}=2+\frac{62}{69}$，

见三下百二十四　$\frac{300}{69}=3+\left(1+\frac{24}{69}\right)$，

见三四五作五　$\frac{345}{69}=5$。

等等，后来演变成飞归口诀。

还有斤、两换算口诀，如下：

一求，克退六二五，　1 两 $=\frac{1}{16}$斤 $=0.0625$斤，

二求，克退一二五，　2 两 $=\frac{2}{16}$斤 $=0.125$斤，

三求，克退一八七五，　3 两 $=\frac{3}{16}$斤 $=0.1875$斤，

四求，克退二十五，　4 两 $=\frac{4}{16}$斤 $=0.25$斤。

……　　　　……

九九以外的数学口诀大概从唐末以后就有了。宋代已有《法算三平化零歌》、《法算口诀》等书，大概都是专讲歌诀的。可惜这些书都已失传。杨辉书中所载的数学歌诀是流传至今的最早的一批。

3．简算法的发展。由于当时社会经济的发展，对于算术的要求日益提高。特别是因为需要大量重复计算，人们必然要研究怎样使重复计算简化，以加快计算速度。实际上这个问题，早已有人研究，例如五代时敦煌千佛洞的一份"算表"，把长方形地亩的计算造成一个数表，表的上端和右侧均列步数。只要量出长、宽的步数，不用计算可立即在表中查出亩

数。后来沈括所说的"见简即用，见繁即变"也是简化算法的意思。沈括以后在民间有人总结地亩的简算法，包括各种常见平面形面积的计算。此外有一种"既已得积步之数，欲捷于计亩"的简算法，是他处少见的。这个问题是已知土地的平方步然后求亩数。具体算法是："一除二四，二除四八，三除七二，四除九六，五除一二，六除一四四，七除一六八，八除一九二，九除二一六。盖一亩者除二百四十也，二亩者除四百八十也，三亩者除七百二十也，推而上之，十亩除二千四百也，二十亩除四千八百也，三十亩除七千二百也。又推而上之，一百亩者除二万四千也，二百亩者除四万八千也，三百亩者除七万二千也。"① 当时二百四十平方步为一亩，只要知道"积步"数，便可立即求出是多少亩，不必进行较多的计算。

杨辉致力于简化算法的研究，并且取得一些成就。他总结当时的乘法提出了"单因"、"重因"、"身前因"、"相乘"、"重乘"、"损乘"等方法，在乘数、被乘数位数不同、情况不同的条件下可以用不同的方法计算。例如"重乘"就是把相乘两数之一分解为素因数之积的形式，然后用因数去乘，这样可把多位数乘法变成位数较少的乘法，他认为"乘位繁者，约为二段，作二次乘之，庶几位简而易乘，自可无误也"。杨辉举了38367×23121这个例子，把23121分解为$9\times7\times367$，先以数367去乘38367，得1480689，然后再用$9\times7=63$乘之。

由于乘除法简捷算法的需要，杨辉特别注意一个整数是合数还是素数的问题。他的"连身加"一词就是指素数，例如29下加"连身加"三字，201到300之间的所有素数都有这样标

---

① 赵彦卫：《云麓漫钞》卷一。

记，造成一张数表，用起来很方便。对整数的这种研究，我国是从杨辉开始的，他以前没有人研究过。

"求一乘"和"求一除"也是简算法。是用加减代乘除，通过折、倍、因来实现。例如237×56，用"求一乘"首先是倍56，亦即$2\times56=112$。再折237，即$\frac{237}{2}=118.5$，然后去乘。又如$13272\div56$，用"求一除"作$26544\div112$。这样做的目的是要把乘数（或除数）的头位数变为"1"，计算就变成了加减法。上举的$118.5\times112=118.5\times100+118.5\times10+118.5\times2=11850+1185+237=13272$。所谓"求一"就是变头位为一的意思。这里所说的"求一"与"大衍求一术"的"求一"根本不是一回事。

杨辉的"损乘"法是一种以减法代乘法的算法。在他以前虽然已经有人用过，但是对于其中某些部分，杨辉则作了较系统的叙述。"损乘"又分为"损一位"、"损二位"等等若干种情况，这里不多讲了。

4．级数求和与纵横图。杨辉在《详解九章算法》中讲到了一些"垛积"问题，本质上都是求级数前n项和的问题。有以下四种：

（1）方垛：

$$S=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$
$$=\frac{h}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)(b-a)$$

（2）果子垛：

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

（3）三角垛：

$$S=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

（4）果子垛：

$$S=a\cdot b+(a+1)(b+1)+\cdots+(c-1)(d-1)+cd$$

$$=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$$

在《算法通变本末》中，杨辉也提到儿个级数求和问题，有三角垛两问，相当于式（3），还有四隅垛一问，相当于式（2）。

公式（4）和沈括"隙积术"完全一致。其余都是式（4）的特殊情形，例如当 $a=b$ 时式（4）就变成式（1），当 $a=b=1$ 时式（4）就变成式（2），等等。

杨辉对这些级数求和公式都有明确的叙述，例如式（2）为："下方加一，乘下方，为平积，又加半为高以乘下方，为高积，如三而一"。

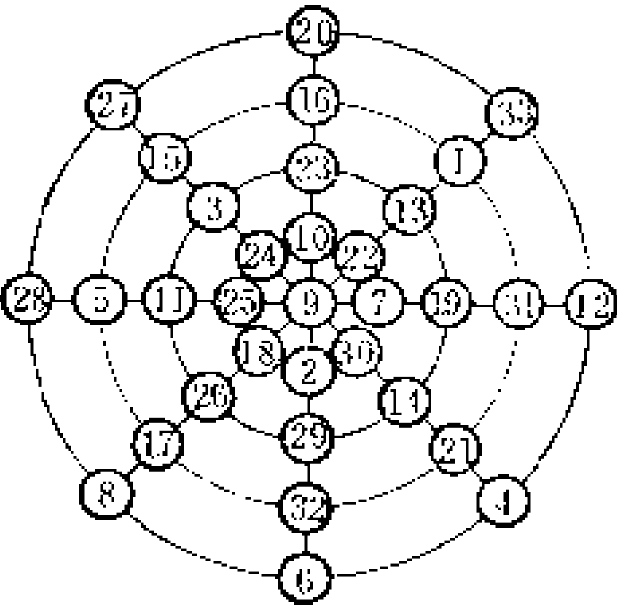
4	9	2
3	5	7
8	1	6

2—25　九宫图

此外，杨辉还研究过纵横图，并有所创造。纵横图是早期组合数学的一个内容，现代已经在许多实际问题上得到应用。至迟在汉代就有了三阶纵横图，由1到9的九个数字排列成一个正方形，各行各列和对角线的每三个数字相加都得十五。叫做"九宫图"（图2—25）。杨辉在《续古摘奇算法》（1275）一书中收入将近20个纵横图，不仅有正方形的，而且还有其它形状排列的。方形的"百子图"（图2—26）是由1到100排列成十阶纵横图，纵、横之和均为505，而对角线都不是这个数。"攒九图"（图2—27）是圆形的纵横图，由1到33排成四个同心圆，中心置9，并且形成四个直径。各直径的各数之和为147，各圆周上的各数之和都等于138。

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

2—26　“百子图”



2—27　“攒九图”

第五节　传统数学的继续发展

公元1126年北宋灭亡以后，北方由女真族建立的金政权所

统治，公元1279年元朝建立全国统一政权。数学在金元时代继续发展，李治、朱世杰等是当时最重要的数学家。同时，中国与阿拉伯间的数学交流也很频繁，对中国数学的发展产生了一定的影响。

半符号式代数——“天元术”

现在的代数式用a、b、c…表示已知数，x、y、z…表示未知数，这是人们所熟知的。这种记法是十六七世纪时在欧洲逐渐发展起来的，沿用至今。类似的方法在我国古代也有萌芽，这就是“天元术”，它在解题时总是先说“立天元一为某某”，和“设x为某某”非常相仿。

1. **“天元术”的产生。**天元术估计产生于十二世纪。唐代的王孝通已能解三次方程，十一世纪时解方程的方法又有新的发展。解方程总要排成筹式，而在筹式中没有未知数，显示不出每一项的次数，这些都需要解方程的人去记忆。所以很不方便，而且容易出错。人们想了一些办法改进筹式，天元术就是这种改进的方法之一。天元术是在方程的筹式的每一项旁边加一种记号，尤其是在特殊项，如一次项、常数项旁加上记号指明其具有某种特殊性，以便于辨别次数。在我国古代常用一些文字做记号，如用天干、地支、八卦命名地理方位和用地支命名昼夜时刻，方程筹式各项的记号就是以这种思想为指导来选择的。就这样产生了以文字作记号为多项式各项系数命名的新方法。最初是每一项用一个文字表示，常数项用“人”表示，一次项以上各项系数分别以“天”、“上”、“高”、“层”、“垒”、“汉”、“霄”、“明”、“仙”表示，最高次项为九次。常数项

以下为负数次幂，最低为负九次，分别用“地”、“下”、“低”、“减”、“落”、“逝”、“泉”、“暗”、“鬼”表示。即$a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + a + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + \cdots + b_8x^{-8} + b_9x^{-9}$可表为右图的形式。

仙a_9
明a_8
⋮
天a_1
人c
地b_1
⋮
暗b_8
鬼b_9

大约十二世纪末或十三世纪初，太原府（今山西）有个叫彭泽的数学家把上面表示法的次序颠倒过来，改为“立天元在下”。后来象《复轨》等数学书中都采用了彭泽的表示法。十三世纪中期的李冶说这种“立法与古相反”①，这说明天元术已有一段较长的历史了。

天元术首先流行于现在的山西、河北一带。十二、三世纪间在这一地区的数学中用到天元术。平阳（今山西临汾县）蒋周的《益古》、博陆（今河北蠡②县）李文一的《照胆》、鹿泉（今河北获鹿县）人石道信的《钤经》、平水（今山西新绛县）刘汝锴的《如积释锁》以及绛（今山西冀城县）人元裕为《如积释锁》所作的细草等，这些书中都包括天元术的内容。可见天元术在当时已相当流行了。

2．李冶对天元术的改进与总结。天元术虽是我国数学中一项重要成就，但是方法不够灵便，每一项用一个字表示也是不必要的。其实只要知道筹式的次序，用一个字表示就可以了。首先进行这种简化工作的是数学家李冶。

李冶（公元1192—1279年），字仁卿，号敬斋，金元时期

① 李冶：《敬斋古今注》卷三。
② 蠡音离 lí。

真定栾城（今河北栾县）人。金正大七年（公元1230年）中进士，作了地方官，不久因金朝灭亡而隐居于今山西、河北一带。他一面进行数学研究，一面收徒讲学。在这期间完成了《测圆海镜》十二卷（1248年)和《益古演段》三卷(1259年)两部数学著作。这两部书辗转流传到现在，是古代数学的珍品。

李冶的天元术改用一个"元"或"太"字表示一次项或常数项。在一个筹式中用"元"不用"太"，用"太"不用"元"。在《测圆海镜》中由高次幂向低次幂上下排列。而《益古演段》的次序则颠倒过来。"元"字都在一次项之旁。两者的区别如右图所表示的那样。在《测圆海镜》中的天元式为

《测圆海镜》图式	《益古演段》图式
a_n	b_n
⋮	⋮
a_2	b_2
a_1元	b_1
c	c
b_1	a_1元
b_2	a_2
⋮	⋮
b_n	a_n

元

相当于方程

$$x^3 + 336x^2 + 4184x + 2488320 = 0$$

而在《益古演段》中的筹式

≡⊤○○
丨=○元

相当于方程

$$120x+3600=0$$

两者的次序刚好相反。

两本书都用“太”字表示常数项。

筹式中的负项则打上一个斜划，如《测圆海镜》中的筹式

‖
一‖○○
三丅○○○○太

相当于方程

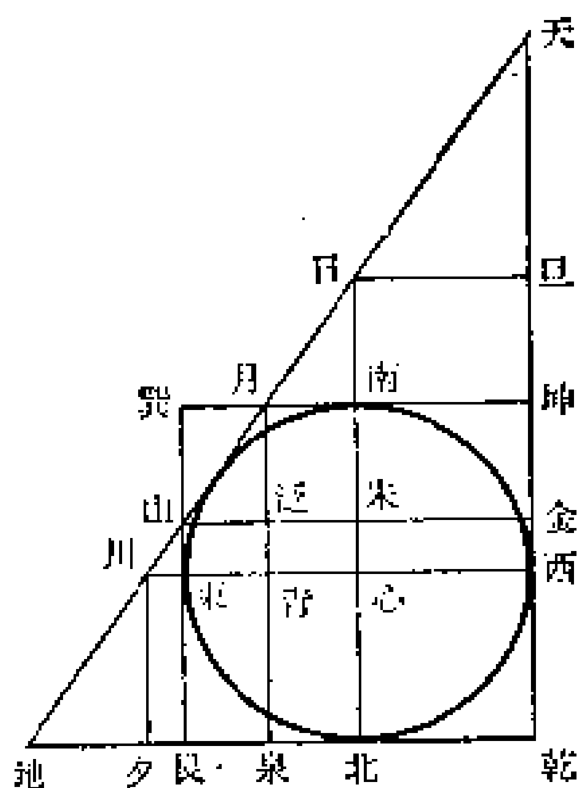
$$2x^2-1200x+360000=0$$

天元术经过长期发展和演变，到李冶的时候作了改进，成为简捷的固定形式。他的两本书是对天元术作了一次总结。

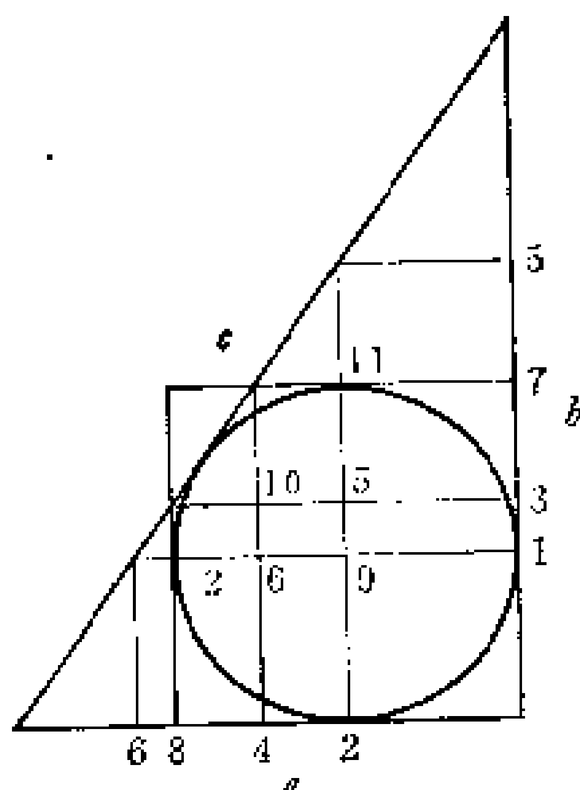
3．几何问题与天元术的应用。李冶在《测圆海镜》中提出了六、七百条几何定理。其中有一百七十条属于勾股容圆问题，是所谓“洞渊九容之说”的发展。他对这类问题研究的经过有一段自述说：“截弧截矢截背之互见，内外诸角，析剖条支，莫不各自名家与世作法，及反复研究，卒无以当吾心焉。老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。”在此基础上编成《测圆海镜》一书①。书中“洞渊”可能是指一个人。北宋时处州（今浙江丽水县）有一位“洞渊大师”，名叫李思聪②，李冶所说的或许

① 李冶：《测圆海镜序》。
② 王应麟：《玉海》卷一。

是此人。李冶所提这些问题的内容大体上都是属于求三角形内各种条件下容圆的直径和研究勾、股、弦及其和、差间的关



2—28 《测圆海镜》之"圆城图式"



2—29 《测圆海镜》之"圆城图式"今式

系。例如在《测圆海镜》卷一开头有一"圆城图式"。如图2—28，在一个大勾股形天地乾中有一内切圆，在此形中又作一些特殊线，构成了十二个勾股形，都和原来的勾股形相似。为了叙述方便，我们把"圆城图式"改用现代符号标记，以 a、b、c 表示大勾股形勾、股、弦之长，其余十二个勾股形的勾、股、弦分别以 a_k、b_k、c_k（$k=1,2,\cdots 12$）表示其长，图2—29中的阿拉伯数码表示大勾股形以外的各勾股形的直角顶点，如原图中的"天川西"，它的三个边用 a_1, b_1, c_1 表示，但只在"西"处写"1"……数码相同的表示两个勾股形全等，用 D 表示内切圆的直径。我们用这些记号表示第二卷的前十个各种容圆问题，其中的九个如下：

（1）勾股容圆　$D=\frac{2ab}{a+b+c}$

（2）勾上容圆　$D=\frac{2a_1b_1}{b_1+c_1}$

（3）股上容圆　$D=\frac{2a_2b_2}{a_2+c_2}$

（5）勾股上容圆　$D=\frac{2a_9b_9}{c_9}$①

（6）勾外容圆　$D=\frac{2a_7b_7}{b_7+c_7-a_7}$

（7）股外容圆　$D=\frac{2a_8b_8}{a_8+c_8-b_8}$

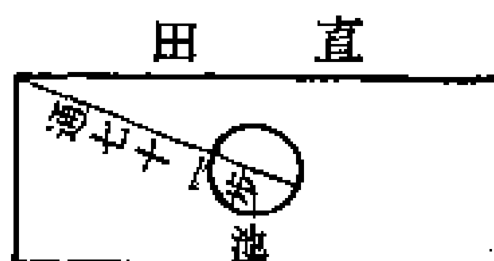
（8）弦外容圆　$D=\frac{2a_{10}b_{10}}{a_{10}+b_{10}-c_{10}}$

（9）勾外容半圆　$D=\frac{2a_{11}b_{11}}{c_{11}-a_{11}}$

（10）股外容半圆　$D=\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}-b_{12}}$

这九个问题也许就是“洞渊九容”。

《益古演段》中一共收入64道题，大都是各种平面形间的面积关系。解决问题的方法往往是通过天元术和“等积变换”（即“演段”）两种。例如第31题：“今有长方形田地一块，中间有圆形水池，池外的面积为三千九百二十四（平方）步。通过长方形一个顶点的直径和圆外到顶点的距离之和为七十一步，长方形的两边

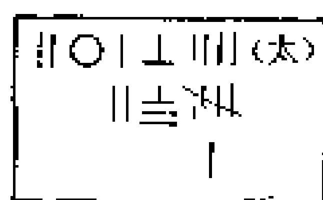


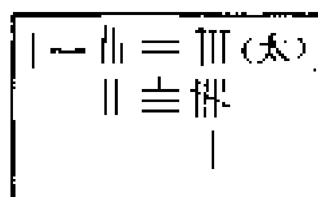
2—30　《益古演段》第31题图

① 第4个公式未录。

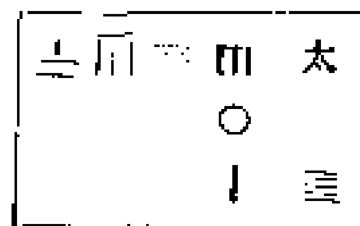
差为九十四步。问圆的直径、长方形的长和宽各多少步？”（图2—30）

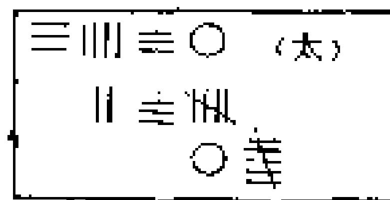
李冶先用天元术解决。“立天元一为内圆径，以减倍通步一百四十二步，得 |☰‖太 ┼ 为长方形田斜（对角线）”，即：设 x 为圆径，2倍“通步”七十一步得一百四十二步，再减圆径 x，即 $142-x$ 为对角线。将 $142-x$ 平方，得 $20164-284x+x^2$，李冶记作(a)那样。这是两块长方形田地面积与长、宽差平方的和。再将长宽差94步平方得8836（平方）步，与上式相减，得 $11328-284x+x^2$，即（b）


（a）


（b）

为两块长方形田地面积，“寄左”（放置在左边）。把直径 x 平方为 x^2，“三之二而一”，即 $\frac{3}{2}x^2(=1.5x^2)$，记为 ○|☰ 太。这是两个水池的面积和（以3为 π 值，$\frac{3}{2}x^2$ 相当于 $2\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$）。将池外的面积也二倍，得7848平方步，与 $1.5x^2$ 相加，得 即 $7848+1.5x^2$（筹式如(c)），也是两块长方形面积之和，与前面“寄左”之式相等。即 $7848+1.5x^2=11328-284x+x^2$，由此得 $3480-284x-0.5x^2=0$（筹式如(d)），李冶解方程得 $x=12$ 步，即为所求。

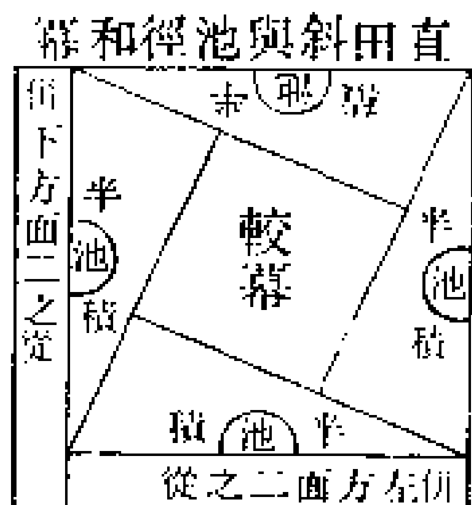

(c)


（d）

从这个解法的过程可以看出，天元术与现代列方程的步骤完全相同，只是符号和语言不同而已。也可以看出李冶的

小数记法是先进的。由位置来决定，纯粹小数前面加一个零，例如0 𝍤即－0.5，和现代小数记法非常相近。

李冶还用图2—31那样的方式说明此问题的图解——演段术，使人们更容易理解。



2—31李冶“演段术”图

中外数学交流

在天元术发展的同时，中外数学交流加强了，特别是十三世纪前期和阿拉伯、波斯的交流尤为频繁。

1．阿拉伯和波斯数学之传入我国。十三世纪五十年代初，成吉思汗的孙子蒙哥派旭烈兀西征时，蒙哥命旭烈兀把中亚著名科学家纳速拉丁·徒思（Nasir ed-din al-tûsi，公元1201—1274年）带回中国。但是，旭烈兀进入波斯以后并没将徒思送回中国，而是带他继续西征巴格达，不久又回到波斯。1258—1259年，在徒思的建议下，于塔夫里兹山麓的马拉加城建立了一座规模很大的天文台，徒思担任台长。徒思把古代希腊的许多科学著作译成阿拉伯文，并作了注解和增补。其中包括欧几里得的《几何原本》、《芬诺门纳》（Phaenomena）和《光学》，阿基米德的《测圆术》和《关于球和圆柱》，托勒密的《大集》，阿波罗尼的《圆锥曲线》和德阿多西阿的《圆球原本》。他自己也有关于比例理论和球面三角的论文。就在这时，“西域人”札马鲁丁等来到我国，很可能就是旭烈兀派回来的。

札马鲁丁是一位出色的天文学家，于至元四年（公元1267年）向忽必烈上《万年历》，同时制造七种阿拉伯天文仪器。1271年又在上都（在今内蒙古正蓝旗）建天文台，札马鲁丁为台长。在这座天文台中藏有大批阿拉伯文科学书籍。至元十年（公元1273年）登记的书中有“合用经书一百九十五部”。其中与天文数学有关的“回回书籍”有以下几种：

（1）兀忽列的四擘算法段数十五部。

（2）罕里速窟允解算法段目三部。

（3）撒唯那罕答昔牙诸般算法段目并议式十七部。

（4）麦者思的造司天仪式十五部。

（5）海牙剔穷历法段数七部。

（6）呵些必牙诸般算法八部。

（7）积尺诸家历四十八部。

（8）速瓦里可瓦乞必星纂四部。

（9）撒那的阿剌忒造浑仪香漏八部。

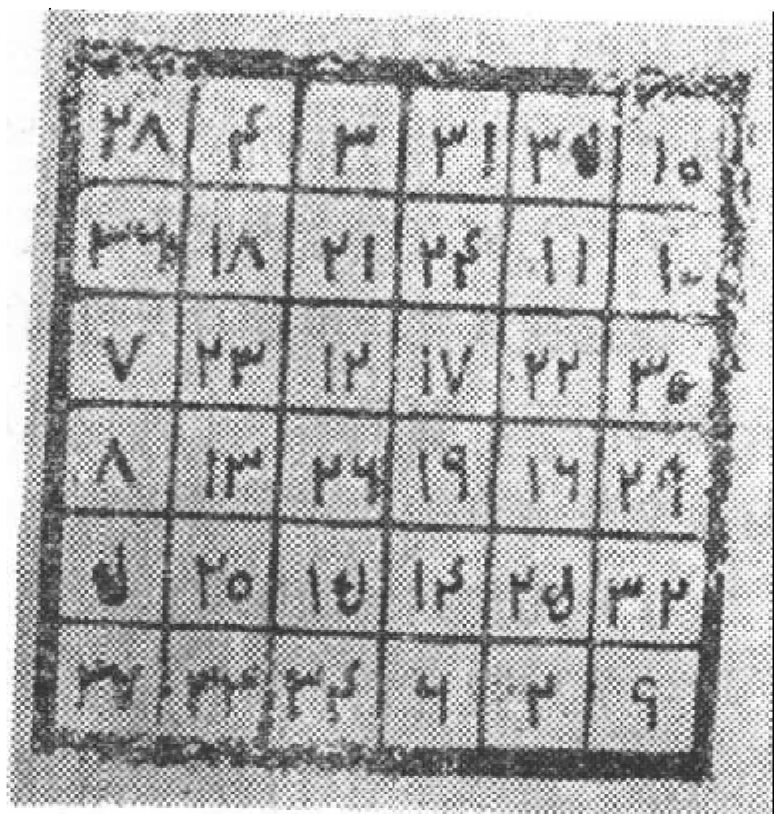
（10）黑牙里造香漏并诸般机巧二部。

还有些天文仪器和天文图①。这些阿拉伯文数学天文等书籍的来历，古书上没有明确记载。但从时间、内容和存放的地点来看，无疑是札马鲁丁带来的。书没有译成中文，上列的书名都是阿拉伯文的音译，其意义大多不太清楚。根据一些人的解释，第一种“兀忽列的”可能是Euclid（欧几里得）的最早译名，因此推测15卷本的《几何原本》已在十三世纪中期传入我国②。第三种“撒唯那罕答昔牙”是几何学的意思。第四

① 王士点、商企翁：《秘书监志》卷七。

② 严敦杰：《欧几里得几何原本元代输入中国说》，载《东方杂志》三十九卷十三号（1943）。

种“麦者思的”是Magest的音译。就是托勒密的《大集》①。这些阿拉伯文希腊科学著作，很有可能是徒思的译本。



2—32　元代铁板上的阿拉伯数码幻方

在此之前，我国首先接触希腊科学的人是蒙哥。据记载，“成吉思汗系诸王以蒙哥皇帝较有学识，彼知解说 Euclide 之若干图式”②。因此可以说蒙哥是我国第一个研究欧几里得《几何原本》的人。但是他没见过札马鲁丁。

印度—阿拉伯数码和阿拉伯幻方传入我国。1956年冬在陕西元代安西王府的旧址发掘出了五块铁板，上刻有六阶印度—阿拉伯数码的幻方（图2—32）。其意义和中国的“纵横图”相当。据《秘书监志》记载，至元十五年（公元1278年），札马

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

元代铁板上阿拉伯数码幻方今释

① 马坚：《元秘书监志“回回书籍”释义》，载《光明日报》1955年7月7日。

② 《多桑蒙古史》第四卷第五章，1962，中华书局，第91页底注。

鲁丁曾为安西王推算历法，同时还有天文台的其它三位官员“见习随侍”。这五块印度—阿拉伯文幻方，很可能就是札马鲁丁等人铸造的。1980年上海博物馆考古部在清理浦东陆家嘴明墓时发现元代的印度—阿拉伯数码的四阶幻方①，由1到16排成正方形，纵横各数之和均为34。各对角线的各数之和也是34，特别是具有全对称性。这比杨辉的“花十六图”更巧妙。

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

上海出土元代阿拉伯数码幻方今释

综上所述，十三世纪希腊和阿拉伯数学陆续传入我国，但是由于没有译成中文，所以流传不广，影响也不大。后来阿拉伯文书籍全部散失。

2．中国数学的外传。在外国数学传入我国的同时，我国的数学也传往外国。旭烈兀西征时就带上一批中国天文学家，随时给他推算历法和进行占卜。当旭烈兀支持纳速剌丁·徒思在马拉加建立天文台时，这些中国的天文学家也就留在那里和徒思一起工作。“其中最有名者为Fao-moun-dji博士，即当时人习称为先生(SingSing)者是已。纳速剌丁之能知中国纪元及其天文历数者，盖得于是人也。”②中国天文学传到了波斯，因此徒思对中国天文学和数学是颇为熟悉的。

① 《文汇报》，1980年12月16日。
② 《多桑蒙古史》第四卷第五章，1962，中华书局，第91页。

天文历法和水利工程中的数学

公元1279年，元世祖忽必烈统一全国后，开始着手在北京建立新天文台，任命王恂、郭守敬等领导天文研究工作。王恂（公元1235—1281年）是当时最著名的数学家，被誉为“以算术冠一时”的人物。郭守敬（公元1231—1316年），是卓越的水利专家和天文学家，曾进行过水利勘察和指挥水利工程。在王恂、郭守敬的主持下，于大都（今北京市）建成一座规模宏大、可与马拉加天文台媲美的天文台。郭守敬设计了将近二十种先进的天文仪器，进行了大规模天文观测。在实测的基础上，于1280年编订出历史上有名的《授时历》，次年颁行。

《授时历》中有不少创造性的成就，比如改进了黄赤交角，给出了相当于23°32′28″的精确结果，采用了365.2425日为一回归年。

过去的历法中都有一个虚设的“上元”，作为历法计算的起点，一般都是几千年或上万年以前的某年，计算起来很麻烦，《授时历》彻底不用了。同时指出，天体运行有自己的规律性，决不是“人为附会所能苟合”的。从此再没有人在历法中虚设上元。

1．三次内插法公式的创立。日、月和五大行星的视运行并不是匀速的。为了解决这类问题的有关计算，刘焯和张遂分别创立了等间距二次内插法公式和不等间距二次内插法公式。但是由于太阳等天体的视运行也不是匀加速度，而是处处改变的，因此用二次内插法公式计算天体逐日所行的距离（按度数计算）也仅是近似的。公元1171年，赵知微重修金杨级所造

《大明历》①时，第一次用到等间距三次内插法公式。王恂、郭守敬在《授时历》中应用较多。

赵知微《大明历》给出了一张“二十四气陟降及日出分”表②，用以说明二十四节气气初的日出时刻。这张数表是怎么造的，历史上没有详细记载。但是经过分析知道，数表中的“初末率”是用等间距二次内插法公式计算的。计算“陟降率”时必须用三次内插法公式，例如大雪气的“陟降率”为“降十一四十”，“四十”是小数部分，计算步骤为

$$1.2850\times15-\frac{14\times15}{2}\times0.0802-\frac{1}{6}\times15\times14\times13\times0.0010=19.2750-8.4210-0.4450=10.3990\approx10.40$$③

其中1.2850、0.0802和0.0010分别是一次差、二次差和三次差。按内插法公式，在计算上还应有一个首项$f(a)$。因为在这里它等于0，所以未出现。补上这一项，就是完整的等间距三次内插法公式了。

过了一百年，王恂、郭守敬编订《授时历》时，再次应用等间距三次内插法公式，比赵知微应用得更普遍。

《授时历》中有关太阳行度的盈缩“积差”、月亮运行度数和五星运动的计算，都用三次内插法。现以求太阳行度盈缩“积差”为例加以说明。

王恂等根据实测，知从冬至到春分太阳运行88.91日，即走完了一个象限（91.31度）。但是如果按太阳每日匀速运行度

---

① 与祖冲之所造历同名，而内容全不相同。

② 《金史·历志上》。

③ 严敦杰：《宋金元历法中的数学知识》，载《宋元数学史论文集》，1966年，科学出版社，第210—224页。

数计算，太阳在这段时间里多走了2.40度，这叫“盈积”。由春分到夏至，太阳要在93.71日才能走完，如按太阳每日匀速运行度数计算，就少走了2.40度，这叫“缩积”。由夏至到秋分，由秋分到冬至与上两段相反。他们把黄道的每一象限弧平分为六段，相当于六气，太阳在每个分点上的观测速度和平均速度从冬至起算之差（即盈、缩差）到每个分点的积累叫做“积差”。

在由冬至到春分的象限中，假定 x 是冬至后的日数，$f(x)$ 为 x 日的积差。王恂、郭守敬等在求 $f(x)$ 时用到了相当于下面的三次函数

$$f(x)=ax+bx^2+cx^3$$

如果用日数 x 除两端，就有

$$\frac{f(x)}{x}=a+bx+cx^2$$

这就是“日平差”。其中 a、b、c 分别叫做“定差”、“平差”、“立差”。把日数 x 依次代入 $f(x)$，则

$$f(0)=0$$
$$f(1)=a+b+c$$
$$f(2)=2a+4b+8c$$
$$f(3)=3a+9b+27c$$
$$f(4)=4a+16b+64c$$
……

又，《授时历》中已知 $a=513.32$，$b=-2.46$，$c=-0.0031$。将这几个值代入上面的式子中，得到求冬至后每日“积差”的数表—“太阳盈初缩末限立成”，用阿拉伯数码改写如下：

"积日" x	"积差" $f(x)$	一差	二差	三差	四差
初 日	0				
		510.8569			
第一日	510.8569		-4.9386		
		505.9183		-0.0186	
第二日	1016.7752		-4.9572		0
		500.9611		-0.0186	
第三日	1517.7363		-4.9758		0
		495.9853		-0.0186	
第四日	2013.7216		-4.9944		
		……		……	
……	……		……		0
		……		-0.0186	
第八十八日	24009.3568		-6.5754		
		5.0593			
第八十九日	24014.4161				

有了这个表求 $f(x)$ 很方便，只要加几次就可得到答案。如

求$f(2)$，把第五栏的三差－0.0186加到第四栏的二差－4.9572上得－4.9758。再把第四栏的二差－4.9572加到第三栏的一差505.9183上得500.9611。最后把第三栏的一差505.9183加到第一日的“积差”510.8569上，即有$f(2)=1016.7752$。因为表中已给出了各日数的$f(x)$值，所以就不必再去加了，这里举例只是为了说明算法。

2．赤道坐标与黄道坐标的换算。一个天体在天空的位置由球面坐标来确定。我国古代主要是通过天文仪器直接测定出天体的赤道经度、赤道纬度、黄道经度和黄道纬度。到了元初，在《授时历》中首次采用坐标换算的办法解决太阳的赤道经度和赤道纬度的问题。

《授时历》中的问题是：已知太阳位置的“黄道积度”求“赤道积度”和“赤道内外度”。设A为春分点，D为夏至点，$\widehat{AD}$为黄道象限弧，$\widehat{AE}$为赤道象限弧，并设太阳运行到B点，那么$\widehat{BD}$为“黄道积度”，$\widehat{CE}$为“赤道积度”，$\widehat{BC}$为“赤道内外度”（图2—33）。王恂等得到相当于如下的两个公式：

$$\widehat{CE}=p_2+\frac{v_2^2}{d} \quad (1)$$

2—33　球面割圆示意图

$$\widehat{BC}=p_3+\frac{v_3^2}{d} \quad (2)$$

其中 $p_2=BN$，$v_2=CN$，$p_3=CP$，$v_3=PE$，d为赤道或黄道圆之直径，N、P分别为B、C向OC、OE所作垂线之垂足。

公式的具体求法是：

如图2—33在扇形ODE中，KE为半弧DE的矢，且设$KE=v$ $DK=p$，$OK=q$。求出$\overset{\frown}{BD}$的有关值，即$\overset{\frown}{BD}$之矢　$LD=v_1$，$\overset{\frown}{BC}$　之半弦　$LB=p_1$，　$\overset{\frown}{BD}$上之余弦　$OL=q_1$。因$LMNB$为平行四边形，则$MN=LB=p_1$，即$MN=p_1$。

因为$\triangle OLM \backsim \triangle ODK$，所以$LM:DK=OL:OD$，又因$BN=LM$，故有

$$BN=\frac{OL\cdot DK}{OD}$$

令$BN=p_2$，　$OD=\frac{1}{2}d=r$，　则$p_2=\frac{q_1p}{r}$

同理有　　$w=\frac{q_1q}{r}$　　　　其中$w=r-ME$。

如设$ON=q_2$，在直角$\triangle OMN$中，就有

$$q_2=\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}$$

考虑半弧BC，$v_2=r-q_2$，根据沈括“会圆术”公式，就得到式（1）。

设$CP=p_3$，$OP=q_3$，$PE=v_3$，根据相似三角形对应边成比例的原理，有

$$p_3=\frac{rp_1}{\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}}$$

$$q_3=\frac{q_1q}{\sqrt{\left(\frac{q_1q}{r}\right)^2+p_1^2}}$$

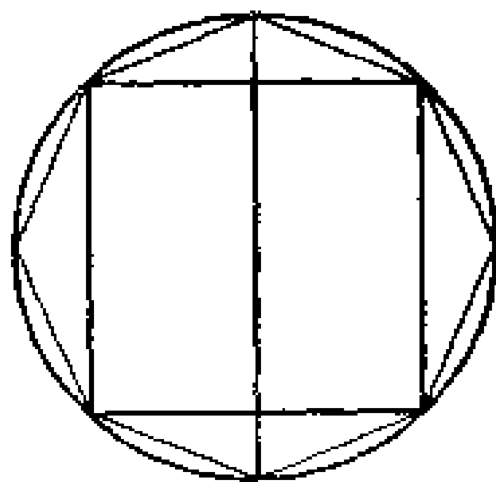
$$v_3=r-q_3$$

根据“会圆术”公式，就得公式（2）。

这个问题在现代天文学上相当于已知太阳位置的黄经余弧，求其赤经余弧和赤道纬度。从图2—33上可以看得很清楚。

在推求公式过程中，王恂等还用了贾宪的"增乘开方法"求出一个四次方程的一个正根，是这种方法的一次实际运用。理论与实际得到了结合。

3．赵友钦的平面割圆术。与郭守敬同时代或稍晚的科学家赵友钦，对于光学、天文学和数学都进行了研究，取得一些成就。他著的《革象新书》五卷，最末一卷"乾象周髀"内从周天的直径讨论圆周率问题。赵友钦对于古代的一些圆周率近似值如3，$\frac{157}{50}$，$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$等进行了比较，认为"圆径一尺而周圆三尺尚有余，围三尺而中径一尺为不足，盖围三尺径一尺是六角之田也。""径一尺却是径少周多。径一百一十三而周围三百五十五最为精密"，然后他又用割圆术的方法证明$\frac{355}{113}$比其它圆周率近似值精密，其步骤与刘徽的基本一致，所不同的是赵友钦从圆内接正方形起算，然后逐渐倍增边数（图2—34）。一直求到圆内接正$16384 = 4\times 2^{12}$边形，得出周长为"三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇"。他在计算时，取直径为1000寸。如将其单位加以变更，则"降呼作三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，以一百一十三乘之，果得三百五十五尺"，也就是证得了$\pi\approx\frac{355}{113}$为最精密，他在天文计算中就是用的这个结果。



2—34　赵友钦割圆图

赵友钦也有了朴素的极限观念，他说："围自四角之方增为八角曲圆，为第一次。若第二次则求为曲十六，第三次则求

为曲三十二，第四次则求为曲六十四。加一次，则曲必倍。至十二次则为曲一万六千三百八十四。其初之小方（即圆内接正方形），渐加渐展，渐满渐实。角数愈多而其为方者不复为方而为圆矣。”这就是说，当着圆内接正多边形的边数无限增加时，正多边形的极限就是圆。但是，赵友钦也认识到，虽然从“一、二次求至一十二次，可谓极其精密。若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”。就是人们可以继续求下去，而且不会求到头。这比刘徽的认识又前进了一步。

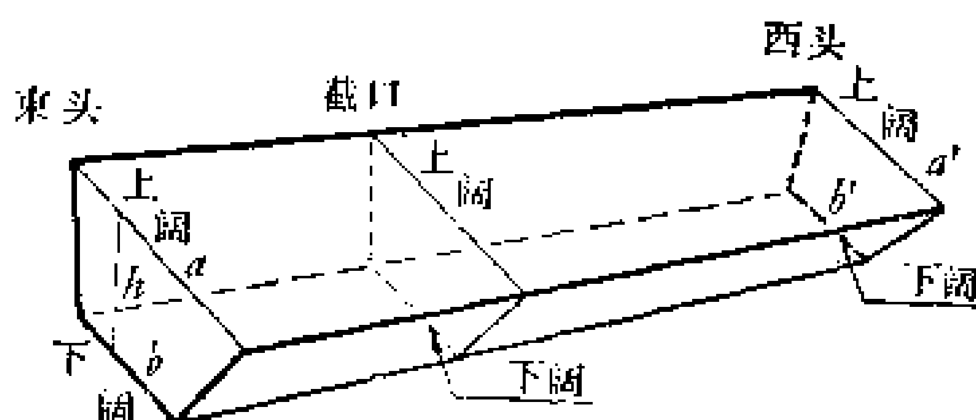
4．天元术在水利中的应用。宋金元时代兴修过许多水利工程，特别是由于黄河经常决口，人们通过堵口实践积累了丰富的治河经验。北宋科学家沈立写的《河防通议》一书，宋、金到元初都用它指导治河工程，而且形成不同的版本，内容也有增补。后来沙克什（又称瞻思公元1278—1351年）把两三种不同版本“合之为一”，又加以补充，于元至治元年（1321年）重订《河防通议》二卷。这本书中有一部分专讲算法，除一般的算术和简单几何问题外，还有一道题是用天元术解算的。

这道题的原文如下：

“假令开渠河一道，正长五百步，东头上阔一千单四十尺，下阔一千尺。西头上阔八百九十尺，下阔八百五十尺。同深一丈。总积二千三百六十二万五千（立方）尺，一百步取土，以四十尺为功，计五十九万单六百二十五功。今欲分一十四万四千四百五十功，问截长、阔多少。答曰：截长一百二十步，截阔九百单六尺〔截上阔九百二十六尺，截下阔八百八十六尺〕。”

把此题改为现在的说法就是：已知要开渠道的长为 l，东头上阔为 a，下阔为 b；西头上阔为 a'，下阔为 b'，深为 h，

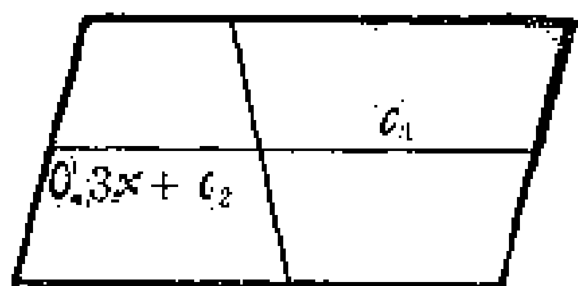
总共土方为V（=23625000立方尺）。将土送走一百步远，40立方尺为一"功"，合590625功。现在打算先做144450功，求这段渠道的长度和相截处的宽度（即梯形的中位线）。



2—35　《河防通议》"开渠"题示意图

沙克什先作了分析，东头的中位线$c_1=\frac{a+b}{2}$（叫做"停大阔"），西头的中位线$c_2=\frac{a'+b'}{2}$（叫做"停小阔"），$\frac{c_1-c_2}{l}=3$寸（0.3尺），即长变一步而截口中位线变3寸（"每步差"）。

然后沙克什用天元术求解如下（图2—36）：



2—36

设x为截长（"立天元一为截长"），以阔差0.3乘之，得$0.3x$，为"截停阔差"。$0.3x+c_2$就是"截停阔"，再加上c_1，于是有$0.3x+c_2+c_1=0.3x+1890$。这是截口的中位线和东头的中位线之和。用h乘之，则$h(0.3x+1890)=10(0.3x+1890)=3x+18900$（尺），再以截长$x$乘之，得$3x^2+18900x$。最后用5乘，得$15x^2+94500x$，为东段体积的二倍，"寄左"。然后把打算挖出的土方体积$144450\times40=5778000$再2倍之，得11556000，与"寄左"式相等，即

$$15x^2+94500x-11556000=0$$

解此二次方程得$x=120$尺，即为所求。

列方程步骤与李冶的完全一致，可见李冶和沙克什的天元术是一脉相承的。实际上，沙克什曾在李冶的家乡居住过，可能间接受过李冶的影响。

朱世杰的总结性成就

元代中国的数学，是继承了金和南宋的全部遗产而发展起来的。十三、四世纪之间的朱世杰则做了总结性的工作，取得了重大成就。

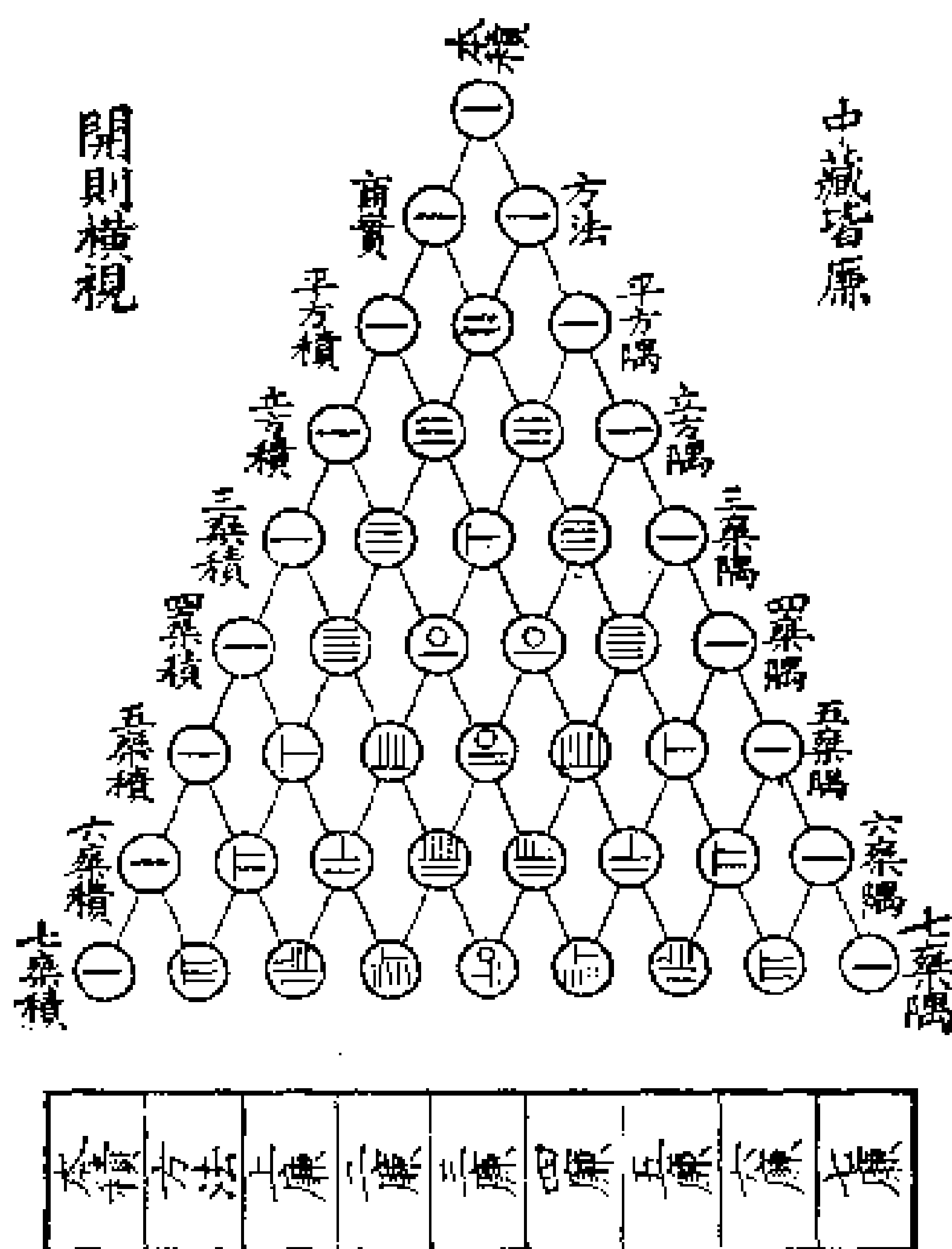
朱世杰，字汉卿，号松庭，寓居燕山（今北京市一带），是一位杰出的数学家和数学教育家。他精通《九章算术》，"旁通诸术"。到1303年时，他"以数学名家周游湖海二十余年矣，四方之来学者日众"，"复游广陵（今江苏扬州市），踵门而学者云集"。朱世杰一生从事数学教育和数学研究，孜孜不倦，刻苦钻研，做出了重要贡献。

1．**集宋金元数学之大成**。对朱世杰的数学工作，清代数学家罗士琳给了恰当的评价，他说："汉卿在宋元间，与秦道古（秦九韶）、李仁卿（李冶）可称鼎足而三。道古正负开方，仁卿天元如积，皆足上下千古，汉卿又兼包众有，充类尽量，神而明之，尤超越乎秦、李之上"①。朱世杰于1299年编写了《算学启蒙》三卷，分20门，包括259题，书前有常用的数表和法则18项，叫做"总括"，为全书之纲。又于1303年完

① 罗士琳：《畴人传续编·朱世杰》。

成《四元玉鉴》三卷，分24门，包括288题，卷前有“今古开方会要之图”5幅和“四象细草假令之图”，讲述了四元术之基本原理。这些都是全书的预备知识。《算学启蒙》比较浅显，《四元玉鉴》则较为深奥，但两书互为表里，各有特点，都是我国古代的重要数学著作。

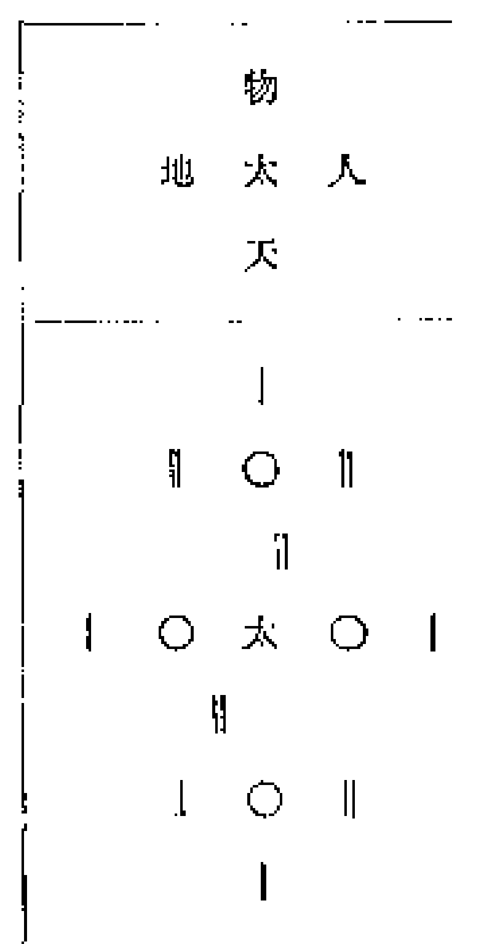
《算学启蒙》卷前之“总括”包括丰富的内容，开头是“释九数法”（九九口诀），其次是“九归除”：“一归如一进，见一进成十。二一添作五，逢二进成十，三一三十一，三二六十二，逢三进成十，……”和后来的珠算口诀差不多。此外，还总结了其它各种口诀、度量衡换算和进位制。“明正负



2—37 “古法七乘方图”

术”一项讲正负数加减法则，一共八条，比《九章算术》更加明确。在“明乘除段”中有“同名相乘为正，异名相乘为负”之句，也就是$(\pm a)\times(\pm b)=+ab$，$(\pm a)\times(\mp b)=-ab$这样的正负数乘法法则，是我国最早的记载。

《四元玉鉴》卷前的“今古开方会要之图”是关于开方的图解法，其中“古法七乘方图”（图2—37)是宋代贾宪“开方作法本源”图的推广。这里已展到八次方（七乘），即$(a+b)^0$到$(a+b)^8$的展开式系数全部求出，即称“古法”，可能是前人作的。“四象细草假令之图”是把天元术（一个未知数的代数）一步一步地推广到了四元术（四个未知数的代数）。据莫若在《四元玉鉴前序》中所说的四元术是：“其法以元气（常数项）居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上”，各未知数的排列如右上图那样。但在筹式中只写各项的系数，而不写元，例如方程

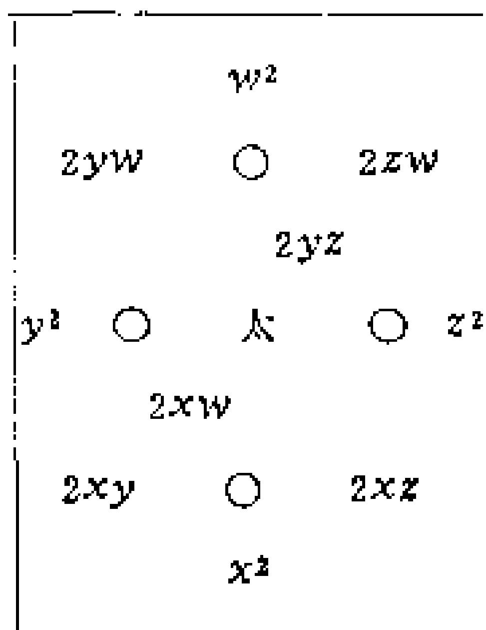


$$x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2yz+2yw+2xyz+2yzw=0$$

其中x、y、z、w相当于天、地、人、物四元。当时的记法如右下图。改为现代符号相当于下页之图。

朱世杰的四元术是在前人研究成果的基础上总结出来的，在他以前，李德载在所作《两仪群英集臻》中除天元之外，还“兼有地元”，有了两个未知数的表示法。刘大鉴编的《乾坤括囊》一书，书末有“人元二问”，即在天元、地元之外又增加了人元，扩充到三个未知数。由三

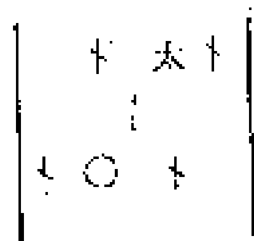
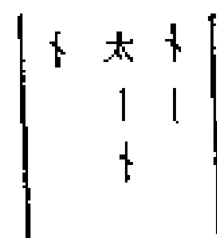
元到四元这一步是由朱世杰完成的。正如他的一位朋友祖颐所说的："吾友燕山朱汉卿先生，演数有年，探三才之颐，索《九章》之隐，按天、地、人、物立成四元，以元气居中"①，这就是四元术。

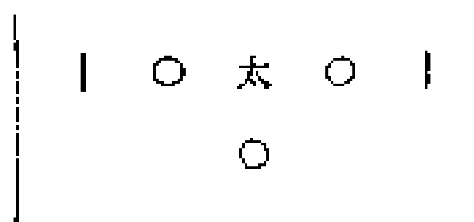


朱世杰对于高阶等差级数、内插法、方程等都有重要贡献，将在下面分别介绍。

2．用四元术解方程。《四元玉鉴》这部书的主要内容之一是解方程，从一元到四元的都有。不过这本书只有解题方法，没有详细演草，因此演算过程不清楚。罗士琳补充了细草。下面参照罗士琳的细草，举例说明朱世杰用四元术解方程的基本内容。

《四元玉鉴》卷首的"四象细草假令"中的"三才运元"一题："今有股弦较除弦和和与直积等，只云句（勾）弦较除弦较和与句同，问弦几何？答曰五步。"这是一个三元问题。朱世杰的解法是：立天元一为句(x)，地元一为股(y)，人元一为弦(z)，三才相配，于是

求得今式  求得云式 

求得三元之式  这三个筹式相当于下面的三元方程组：

① 祖颐：《四元玉鉴后序》。

$$\begin{cases} -x-y-z-xy^2+xyz=0 & （“今式”） \\ x-y-z-x^2+xz=0 & （“云式”） \\ x^2+y^2-z^2=0 & （“三元之式”） \end{cases}$$

“以云式剔而消之，二式皆人易天位，

前得

丨	丨	卄	太
十	丨	十	
	丨	卄	

后得

丨	卄	‖	太
卄	‖‖	卄	
	丨	卄	

”。

这是朱世杰的原话，不易理解，现取钱宝琮的解释如下[①]：把“云式”和“三元之式”分别改为

$$y=-x^2+x+xz-z, \qquad (A)$$

$$y^2=z^2-x^2 \qquad (B)$$

将(A)、(B)代入“今式”，稍加整理并写成

$$(-z+1)x^2+(z^2+z+1)x+(-2z^2-z-2)=0 \qquad (C)$$

将其写成筹式，按顺时针方向旋转90°就得朱世杰的“前式”。又将(A)两边平方，再与(B)相减，加以整理写成

$$x^3+(-2z-2)x^2+(z^2+4z+2)x$$
$$+(-2z^2-2z)=0 \qquad (D)$$

将其写成筹式，按顺时针方向旋转90°，便得朱世杰的“后式”。

为了消去x，将(C)、(D)两式加以改变：以x乘(C)式，$(-z+1)$乘(D)式，两式相减得

$$(z^2-z-3)x^2+(-z^3-z^2+3z+4)x$$
$$+2z^3-2z=0 \qquad (E)$$

① 钱宝琮：《中国数学史话》，1957，中国青年出版社，第128—131页。

再以 z 乘(C)式，然后与(E)式相加，得

$$-3x^2+(4z+4)x-z^2-4z=0 \qquad (F)$$

以$(-z+1)$乘(F)式，以 3 乘(C)式，相加，得

$$(-z^2+3z+7)x+z^3-3z^2-7z-6=0 \qquad (G)$$

以$(-z^2+3z+7)$乘(C)式，以$(-z+1)x$乘(G)式，相减，得

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+2z^4-5z^3-15z^2$$
$$-13z-14=0 \qquad (H)$$

最后的两个式子(G)、(H)，朱世杰分别称为“左式”和“右式”，并记作

左式：

7	−6	太
3	−7	
−1	−3	
	1	

右式：

13	−14	太
11	−13	
5	−15	
−2	−5	
	2	

左式的右行和右式的左行，朱世杰称为“内行”，其余两行称为“外行”。内二行相乘，经整理得

$$-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78=0 \qquad (I)$$

外二行相乘，经整理得

$$-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98=0 \qquad (J)$$

两式相减，再用四除，最后得

$$z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0 \qquad (K)$$

解此四次方程，得正根 $z=5$，即为所求。

从上边的例子可以看出朱世杰用天、地、人元解方程的大体过程。关于四元的情况，也可以用同样的思想去理解。

3．高阶等差级数与内插法。朱世杰在高阶等差级数和内插法方面也取得了重要成就。他在沈括、杨辉和王恂等人的基础上，把级数和内插法向前推进了一大步。在《算学启蒙》和

《四元玉鉴》两书中有一大批这样问题：已知各种垛积的物体的总数，求垛积底层物体的个数。这类问题的解决，须先知道级数求和公式，然后才能反求底层物体的个数。关于求和公式有下面一组：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2!}n(n+1)\text{①},$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2!}n(n+1)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)\text{②},$$

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4!}(n(n+1)(n+2)(n+3)\text{③},$$

$$1+5+15+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\text{④},$$

$$1+6+21+\cdots+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+5)\text{⑤}。$$

这组公式中的第一、第二两式早已有之，特别重要的是这些公式之间有着密切的联系。前一公式的和是后一公式的通项，例如第一个级数的和$\frac{1}{2!}n(n+1)$，当$n=1,2,3,\cdots n$时，就构成了第二个级数。这些公式可以归纳成下面的一般形式（可以叫"朱世杰等式"）：

① 《算学启蒙·堆积还原门》第1、3问，《四元玉鉴·茭草形段门》第6、7问等。

② 《算学启蒙·堆积还原门》第4、11、14问，《四元玉鉴·果垛叠藏门》第1、第14—20问等。

③ 《四元玉鉴·茭草形段门》第2问，"如象招数门"第2、3、5问。

④ 《四元玉鉴·茭草形段门》第4问，"如象招数门"第5问。

⑤ 《四元玉鉴·果垛叠藏门》第6问。

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$ ①

当$p=1,2,\cdots 5$时就得到上面的五个公式。

还要注意到：第一个级数相邻两项之差都等于1；第二个级数相邻两项之差依次为1,2,3,…,再减一次也都变成1；第三个级数相邻两项的三次差都变成1，等等。因此它们分别是一阶等差级数，二阶等差级数……

此外，朱世杰还研究过其它形式的级数求和问题，这里不再列举。中世纪时期，印度和阿拉伯数学家曾求得不少级数求和公式，其中有些和我国杨辉、朱世杰等的公式相当。

《四元玉鉴》中卷“如象招数门”主要是讲招差术，实际上也是属于高阶等差级数问题，但其求和是通过招差公式，即内插法公式进行的。其中最后一题自注非常典型：“今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵，今招一十五方，每人日支钱二百五十文，问兵及支钱各几何。答曰：兵二万三千四百人，钱二万三千四百六十二贯。”

招兵的人数以立方计算，也就是第一次招兵$3^3=27$人，第二次招$(3+1)^3=4^3=64$人，就这样一直招到第十五次，即$(3+14)^3=17^3$，十五次共招兵

$$S=3^3+4^3+\cdots+17^3$$

直接求和，要进行大量的乘方计算，朱世杰没有采用这个方法，而是利用招差公式求出招兵总数。我们把朱世杰的叙述写为现代形式的数表如下：

① 钱宝琮：《朱世杰垛积术广义》，《学艺》第四卷第七号（1923），第1—9页。

日次	累日共招兵人数	每日招兵人数（上差，Δ）	二差，Δ^2	三差，Δ^3	四差，Δ^4
		$3^3=27$			
1（初日）	27		37		
		$4^3=64$		24	
2（二日）	91		61		6
		$5^3=125$		30	
3（三日）	216		91		6
		$6^3=216$		36	
4（四日）	432		127		
		$7^3=343$			
5（五日）	775				
		…	…	…	…
…	…				

四次差相等，五次差就为零了。一次差到四次差分别与n、$\frac{1}{2!}n(n-1)$、$\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$、$\frac{1}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)$对应相乘，再相加，就得到前$n$次共招兵人数$f(n)$的朱世杰计算公式：

$$f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3$$
$$+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4$$

这就是四次等间距内插法公式，和现代公式基本一致。建议称此式为“朱世杰内插法公式”。

第　三　章

元代后期到清代中期

（公元十四世纪初期到十九世纪中期）

朱世杰以后（即十四世纪初以后），直到清朝中期，约近五个半世纪。在此期间，虽然我国已经有了资本主义萌芽，商业数学得到普及（特别是珠算），西方初等数学的传入，康熙皇帝对数学的重视，以及梅文鼎、年希尧、明安图、汪莱、李锐等数学家的工作，取得了一些成就，但是发展不快，尤其是和当时欧洲的数学相比更是远远地落后了。十八世纪中期到十九世纪中期，在复古思潮的影响下以及其它一些原因，不少学者（如戴震等）致力发掘和整理古代数学著作，很少创新。

第一节　商业数学的发展与西方初等数学的传入

商业数学的发展

从朱世杰以后到明代末年即到十七世纪初年，这个时期，

我国的数学有明显的特点，主要是高深的理论研究几乎完全停止，而日常应用的算术和珠算得到普及，并形成口诀化。这与当时商业等的广泛社会需要有密切关系。

1．**生产力的提高与科学技术的发展。**从十四世纪初到十七世纪初的三百年里，我国的生产力有很大的提高，手工业、航海、海外贸易等远超前代。当时，冶金、陶瓷、纺织等方面的生产技术都领先于世界。榨油、制糖、制革、造纸、酿造等都很发达。明永乐三年到宣德八年（即公元1405—1433年）的二十八年中，明朝派郑和等率大型船队七次出使南洋、印度、阿拉伯和东非各国。这个船队中最大的船，长四十四丈，宽十八丈。我国的许多手工业产品和土特产品大量远销东南亚和印度洋沿岸国家；同时外国商品也不断进入我国沿海各地和内地大城市。郑和下西洋的规模之大，时间之早，超过了世界上有名的哥伦布（C. Columbus，公元1451—1506年）1492年横渡大西洋的航行。内河航运也很发达，当时仅浙江一带的江船就多达“以万亿计”。

生产技术的发展推动了科学的进步。明代在地理学、医药学、物理学、农业科学、化学等许多方面都有重要成就，出现了李时珍、周述学、宋应星、徐霞客、徐光启等科学家；完成了《本草纲目》、《天工开物》、《农政全书》等重要科学著作。从十六世纪中期到十八世纪中期，形成了我国科学发展的小高峰。

2．**商业数学的普及。**由于商业的发展，相应的数学知识广泛地受到重视。元明时代出版了不少数学书，内容虽然大都比较浅显，然而却适合商业的要求。其特点之一是口诀化。以前已经有了的数学口诀，在这个时期发展得特别快，如元末贾亨

的《算法全能集》、何平子的《详明算法》等都是口诀化数学书的代表作。当时的一些数学书，商业味道很浓，如元代丁巨的《丁巨算法》（1355）中大部分算题与商业有密切关系。明代吴敬的《九章算法比类大全》和程大位的《算法统宗》也具有代表性。当时的一些商人对于数学很感兴趣，程大位本人就是商人。他“少游吴楚”，在长江中下游为商，晚年则从事数学研究。

吴敬生活在当时商业发达的钱塘（今杭州市）。他的《九章算法比类大全》十卷，是花了十年的时间整理、研究，于1450年完成的。吴敬是当时钱塘一带有名的数学家，因此一时许多官吏，“皆礼遇而信托之”。请他解决各种数学问题，这些问题成为他数学研究的重要内容，很可能把其中的一部分收入了《九章算法比类大全》内。



吴　敬

《九章算法比类大全》中关于商业的算题很多，包括合伙经营、商品交换等等。如“今有罗、绢二十三匹〔匹法四丈〕，共卖钱一百六十八贯，只云罗四尺与绢九尺共价适等。又云绢一尺比云罗一尺少一百五十六贯，问罗、绢各多少尺，每尺各多少钱？”又如“今有铜四万六百五十斤，每斤价钱二贯八十文，问一共多少钱？”以乘法计算得 84552 贯。在卷第十的“今有唇底相登的四隅垛”问题中，提到“和酒”、“常酒”和小瓶酒三种酒。酒的种类有了增加，而且数量很大。《算法

统宗》更是典型。

《九章算法比类大全》中还有一种“写算”乘法（图3一1）是这以前我国数学书中从未见过的算法。它是先画一些方格，格的多少根据数字位数的多少来确定，选择一个方向画上每个方格的一个对角线。计算时先将被乘数横写于方格顶上，乘数写于方格右侧。都是每一个方格外写一个数字。每两个数字乘得的结果按十位与个位填写于对应方格对角线之上下，再按对角线斜行相加。空位不写字。例如306984×260375＝79930959000（原书上的数字都是汉文），计算如上面的方格。在《算法统宗》里也有类似的算法，程大位叫它“铺地锦”。这种算法，当时在欧洲、印度、阿拉伯、中亚等广大地区非常流行，因而有更多的机会传入我国。

	3		6	9	8	4	
	/6	/	1/2	1/8	1/6	/8	2
7	1/8	/	3/6	5/4	4/8	2/4	6
9	/	/	/	/	/	/	
9	/9	/	1/8	2/7	2/4	1/2	3
3	2/1	/	4/2	6/3	5/6	2/8	7
	1/5	/	3/	4/5	4/	2/	5
	9	5	9				

3一1　“写算”乘法图

《九章算法比类大全》成书后二十八年，即1478年，在意大利的特雷维沙（Treviso）出版了第一本西方商业数学①。其中许多算法、名称与《九章算法比类大全》非常相似。但是，两者可能没有因袭关系，而是各自独立写成的。这个事实充分说明，中西资本主义萌芽时期商业活动在数学中的反映是一致

① D.E.Smith, A Source book in Mathematics, Vol. I, 1959, PP. 1—12

的。

3．珠算的产生与发展。珠算是我国人民的一项有实用价值的发明创造，长期以来深受人们的欢迎，至今仍在使用。珠算是什么时候发明的？这个问题历来说法不一，其实它是古代筹算逐渐演变的结果，很难说出发明的确切时间和发明者。据现有的资料来看，珠算大约发明于宋元时代。它所用的口诀，在宋元间已经具备，为珠算的使用和流传创造了先决条件。

元末陶宗仪在所作《南村辍耕录》卷二十九中有一条记载说：“凡纳婢仆，初来时曰擂盘珠，言不拨自动。稍久曰算盘珠，言拨之则动。既久曰佛顶珠，言终日凝然，虽拨亦不动。此虽俗谚，实切事情。”古代的筹算也有算盘，所用工具是算筹，不能称“珠”，也不能拨，因此陶宗仪所说的“算盘珠”决不是筹算，而是珠算。可见至迟在元代珠算已有某种程度的普及。明代的许多书中提到了珠算。其中最早是洪武四年（公元1371年）刊本《魁本对相四言杂字》中明确讲到了算盘，里面还有一幅珠算的算盘图。

《魁本对相四言杂字》是一本很浅的看图识字性质的书，可见珠算在当时已很普及。

十五世纪中期在一本木工手册《鲁班木经》中已规定了制造珠算盘的具体规格：“算盘式：一尺二寸长，四寸二分大。框六分厚，九分大，起碗底。线上二子，一寸一分；线下五子，三寸一分。长短大小，看子而做。”这时珠算盘没有横梁，用一线相隔，上二子下五子，还带有早期的性质。这里把算盘珠叫做算盘子。1524年，王文素在《算学宝鉴》卷五中说：“众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便，既乘已毕，只动一子居下，余仍如故”，也指珠算。

当时已出现了打算盘能手。明代著名学者唐顺之（公元1507—1560年）就是代表。“唐顺之至庐州，适府有算粮事，唐子乃索善算者十余人，人各与一数，算讫记其概只数字，凡三四易，自拨盘珠，每一数字亦只记数字，不移时而一府钱粮数目清矣。老书、算，咸精其神速”。[①] 这反映了珠算在会计方面的威力和唐顺之精于珠算的情况。

十六、十七世纪间有关珠算的书籍，有些已经失传，流传至今的有徐心鲁的《盘珠算法》（公元1573年）、柯尚迁的《数学通轨》（公元1578年）、朱载堉的《算学新说》（公元1584年）、程大位的《算法统宗》（公元1592年）和黄龙吟的《算法指南》（公元1604年）等。这些书中所载的算盘图都已有了固定的横梁，比用线隔开的办法有所改进。

在上列诸书中，以《算法统宗》流传最广，影响最大，出版以后翻印本、改编本均有多种，长时间内成为学习珠算的入门书。这部书共有十七卷，包括算盘图式、珠算口诀和用珠算解决问题。其中关于蝉联算法（珠算开方）是程大位首先提出来的。在书的最末附有一篇“算经源流”，记载了宋元以来刻本数学书五十一种。因其中大部分都已失传，所以这一附录便成了宝贵的数学史料。



程大位

明代珠算的大普及是明代商业贸易发

① 姚之骃：《元明事类钞》卷十八。

展的结果。那时商业上的计算不需要高深的理论，而重复的四则计算则是大量的，珠算正适合于这种需要。因此，珠算的普及具有时代的特征。

另外，王文素、程大位还对纵横图进行过研究，并且取得了一些成果。

西方数学的传入

珠算只是满足了社会上的一般要求，不能适应科学技术发展的更高需要。另外，当时围绕着天文历法和其它方面进行着激烈的斗争，数学界也有不同观点的辩论。这一点和同时代西方的情况很相似。但也正是在这时，西方数学传到了我国。

1．围绕历法改革的斗争和数学中不同观点的论述。明代在科学领域的斗争是很激烈的，首先表现在改历问题上。明初把元《授时历》稍加改编而成《大统历》，直到十六世纪已经二百多年，没有进行重大改革。《授时历》虽是一部好历法，但因时间长了，误差越来越大。早在景泰元年（公元1450年）正月辛卯，卯正三刻月食，司天监误推为“辰初初刻”。成化十五年（公元1479年）十一月戊戌望，“月食，监推又误”，本来是由于历法本身的不精确造成的，但“帝（成化皇帝）以天象微渺，不之罪也”。与此相反，主张改革历法的人却被囚禁，如成化十七年（公元1481年）真定教谕俞正己由于提出改革历法的建议，结果以所谓“轻率狂妄”之名被投入监狱。成化十九年，司天监天生张陞又提出改历的建议，司天监又以

"祖制不可变"为由拒不采纳①。之后，司天监所预报的日月食，一直是屡屡不准，但改历的倡议，均遭排斥。斗争也一直未停。

在数学方面，也存在着不同的观点，例如有关数学起源的问题，数学和社会实践关系的问题等都是人们非常关心的问题。明代数学家多数都在自己的著作中提到"隶首作数"的说法，或是认为数学起源于"河图洛书"。程大位在这方面很突出，他在所著《算法统宗》一书中，开头就说"河图洛书"是数学的"本原"，同时画了一幅"龙马负图"图。这些看法不仅没有根据，而且把数学起源问题神秘化了。

但是，也有坚持正确看法的学者，其中周述学可为代表者。他提出了符合唯物主义观点的"名数御量"说，对于数学的起源、数学与实践的关系有比较明确的认识。他在《神道大编历宗算会》中写道："夫物之不齐，物之情也。故其形体有长有短，有广有狭，有多有寡，有轻有重。是以立数名以御之：度之以弓尺，而长短广狭明；量之以斗斛，而多寡审；权之以斤秤，而轻重析。此度、量、权三法为数之纲也。"这就是说，数学起源于度、量、权这三个方面的实际需要，它们是人们生产、生活上必需的三种基本数量关系。在周述学看来，物质有数量关系的属性，由于人的实际需要才"立法名数御之"，于是产生了数学。对数学认识得如此正确的数学家，在当时是极少见的。

2. **早期西方数学传入我国的经过**。当时虽然珠算已经普及，在社会上起了极大的作用，但是数学理论研究则远不如宋

① 《明史》卷三十一"历志一"。

元时代。然而有些问题的解决没有较高的数学水平是不行的，如历法改革就需要丰富的数学知识。正在这时，西方的初等数学传到我国，其中有的就是伴随着天文历法传入的。

十五、十六世纪期间，西方处于资产阶级革命的前夕。一些国家为了寻找贸易市场和原料基地，便派传教士到东方来。来我国的传教士中，早期影响最大的为利玛窦。

利玛窦（Matteo Ricci，公元1552—1610年），意大利人，德国著名数学家克拉维斯（C.Clavius，公元1537—1612年）的学生。他于明万历十年（公元1582年）来到我国，带来一些西方的科学技术成果，如世界地图、自鸣钟、数学书籍等。

利玛窦之后，又有龙华民（Nicolaus Longobardi，公元1559—1654年）、邓玉函（Jean Terrenz，公元1576—1630年）、汤若望（Jean Adam Schall Von Bell，公元1591—1666年）、罗雅谷（Jacgues Rho，公元1593—1638年）、熊三拔（Sabathin de Ursis，公元1575—1620年）、庞迪峨（Didace de Pantoja，公元1571—1618年）等等，陆续来到我国。这些传教士大都精通天文学。

当时我国正处在历法需要改革的关键时期。万历三十八年（公元1610年）十一月朔日食，“历官推算多谬，朝议将修改”，第二年五月周子愚便趁机把庞迪峨、熊三拔等推荐给朝廷，建议让他们参加历法改革。这事后来得到市民阶层出身的科学家徐光启（公元1562—1633年）、李之藻（公元1565—1630年）、李天经（公元1579—1659年）等人的有力支持。他们抵制反对改历的各种意见，终于从崇祯二年（公元1629年）开始进行改历工作。在徐光启等人的主持下编译西方的天文历法和数学书。到崇祯七年（公元1634年）共完成一百三十七卷，名

为《崇祯历书》。入清以后，汤若望掌管钦天监，于顺治二年（公元1645年）将其修正改称《西洋新法历书》。

徐光启是我国十六、十七世纪间著名的科学家。他早在改历之前就已与利玛窦合译欧几里得《几何原本》前六卷和《测量全义》等书；又自著《测量异同》、《勾股义》等书。他对于明代数学理论发展的落后状态提出了自己的看法，认为这是由于“其一为名理之儒，土苴天下之事实；其一为妖妄之术，谬言数有神理”所造成的。“名理之儒”和“妖妄之术”确实是阻碍数学发展的两个主要原因。徐光启一方面赞扬《几何原本》中逻辑推理的严谨性，并试图用这种思想解决我国古代数学的问题；另一方面又很注意数学在社会实践中的应用，特别提出了由数学推出的结论“不验不用”的主张，提出数学要受实践的检验，经过检验才能判明其真理性。这些看法都是正确的。他虽然在数学上很少创造性的成果，但是积极吸收西方的数学，对我国数学的发展也起了不小的作用。



徐光启

3. 笔算的传入。在我国历史上，外国笔算曾几次传入我国，可是没有推广使用。利玛窦来我国时带来一部笔算著作，是他的老师克拉维斯编的《实用算术概论》。他与李之藻参考

《算法统宗》进行了编译，完成《同文算指前编》、《同文算指通编》和《同文算指别编》。这是我国第一部系统介绍欧洲笔算的数学书。它对我国影响很大。

《前编》二卷，讲述自然数、小数的算术四则运算。书的开头评论了古代的筹算和当时流行的珠算，然后指出："兹以书代珠，始于一究于九，随其所得而书识之，满一十则不书十，书一于左,进位，乃作〇于本位,一〇曰一十。由十进百、由百进千、由千进万皆仿此。"这就是笔算进位方法，和现行的完全一致。

《通编》八卷，讲述用笔算解比例、盈不足、开方、级数、方程等问题。其中许多例题是编译时从其它数学书中选取而补进去的。比例问题，《前编》叫做"三率准测法"，相当于我国古代的"今有术"。

《别编》不分卷，只有"测圆诸术"，内容很少。综观全书，数学内容都比较浅显，没有超出我国的水平。其中有些算法相当繁琐，如验算法是从土盘算法①演变而来的，不适合于笔算，因此后来被淘汰。

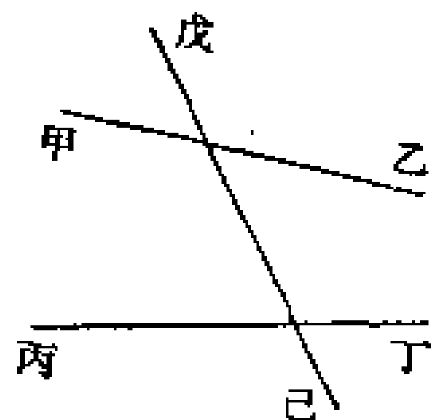
与此同时还翻译了一部叫做《欧罗巴西镜录》的算术书。因为没有刊本，所以目前只有孤抄本保存在北京大学图书馆。

4．几何知识的传入。西方的几何知识虽然在元代曾传入我国，但是没有产生多大影响。明末时再次传入，如前已提到的欧几里得《几何原本》的翻译问题。原书十五卷，徐光启和利玛窦合译了前六卷。"几何"一词就是翻译时徐光启加上的

① 中世纪时在印度、阿拉伯和中亚等地流行的一种算法，因其将细沙撒在地上或盘上以竹棍或铁棍进行计算，故名土盘算法。

(但不是"Geometry"的音译)。后来一直这样沿用。

这部书是用形式逻辑的方法把已有的(指古代希腊)几何知识建立了最初的体系。在卷一之前给出了"界说三十六"、"求作四"和"公论十九",相当于现在所说的定义、作图公法和公理,作为全书推理的基础。如按现代数学观点来看,其逻辑结构自然不够严谨,然而在两千多年前可以说是不错了。现将其中第十一公论(即公理)叙述如下:如图3—2,有二横直线或正或偏,任加一纵线,若三线之间同方两角小于两直角,则此二横直线愈长愈相近必至相遇。这是数学史上有名的"第五公设",它与平行公理等价,现已由平行公理所代替。第五公设在初等几何中具有特征的性质。所谓欧几里得体系实际就是指采用这条公设或与它等价的命题建立起来的几何系统(当然是要保留其它初等几何公理)。因此它是十分重要的。



3—2　《几何原本》中第十一公论图

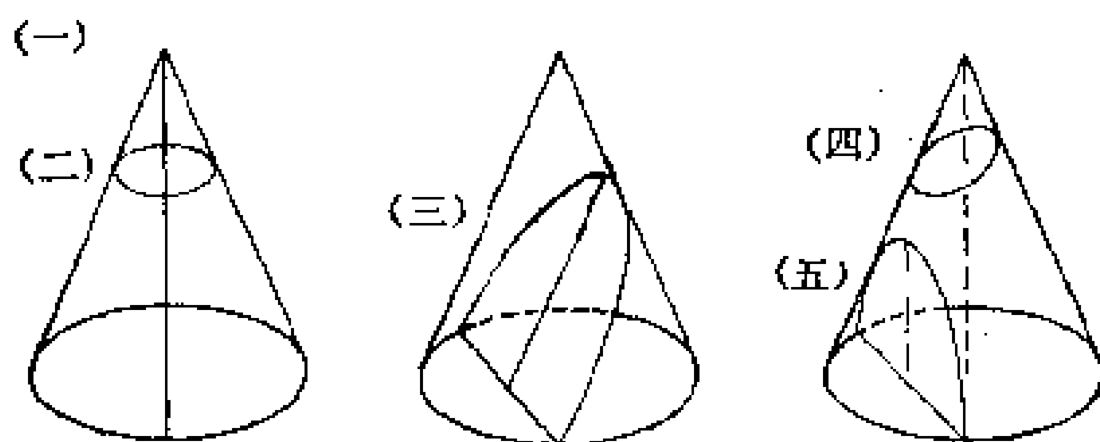
徐光启对《几何原本》的逻辑结构称赞不已,评价很高。他指出:"此书有四不必:不必疑,不必揣,不必试,不必改。有四不可得:欲脱之不可得,欲驳之不可得,欲减之不可得,欲前后更置之不可得。有三至三能:似至晦实至明,故能以其明明他物之至晦;似至繁实至简,故能以其简简他物之至繁;似至难实至易,故能以其易易他物之至难。易生于简,简生于明,综其妙在明而已。"①这里所说的,虽不免有些夸大,但却反映出当时徐光启对于数学逻辑系统的认识。

① 徐光启:《几何原本杂义》。

《几何原本》前六卷的内容包括三角形、圆、多边形、算术比例和线段比例及有关问题。很显然，所讨论的仅是平面几何的一部分，立体几何全无涉及。

这部书出版后不久，在我国又出现了几个简本，如《几何体论》、《几何用法》（公元1608年）、《几何要法》（公元1631年）等。前两书为孙元化（公元？—1632年）所作；后一书题"艾儒略（Juies Aleni，公元1582—1649年）口述，海虞瞿式耜笔受"，郑洪猷1631年序①。

在《崇祯历书》中也有一些几何学内容。其中讲几何最多的是《测量全义》，全书共十卷，第五、六两卷属于几何的内容不少。第五卷主要介绍古希腊科学家阿基米德、帕普士（Pappus，公元4世纪人）等人的几何学研究成果，如割圆术、圆周率、圆面积、计算三角形面积的"海伦公式"、球面几何等等。第六卷还介绍了圆锥曲线，并有定义说："截圆角体（圆锥）法有五：从其轴平分直截之，所截两平面为三角形，一也。横截之，与底平行，截面为平圆形，二也。斜截之，与边平行，截面为圭窦形（抛物线），三也。直截之，与



3—3　《测量全义》中之截圆锥图

① 据裴化行在《崇祯历书及西洋新法历书》（《华裔学志》第三卷）上说《几何要法》可能录自Euclidis Elementorum libri XV JO.Magniensis, Cologne, 1592一书。

轴平行，截面为陶丘形（双曲线），四也。无平行任斜截之，截面为椭圆形，五也。”（图3—3）

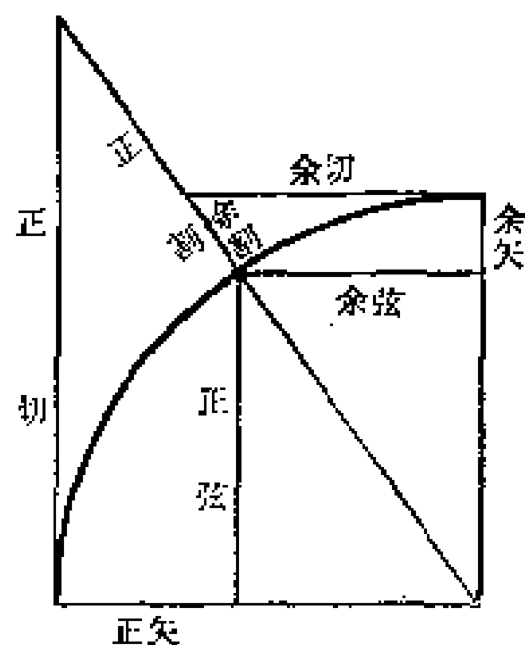
5. 三角与对数的传入。三角是西方十六、七世纪发展较快的数学分支。因为它在天文历法方面有广泛的应用，所以在《崇祯历书》中有邓玉函撰的《大测》（二卷）和《割圆八线[①]表》（六卷），罗雅谷撰的《测量全义》（十卷）等书，介绍平面三角、球面三角和三角表。

其中《大测》一书，可能是依据德国毕笛斯克斯（B.Pitiscus，公元1561—1613年）的《三角法》和荷兰斯台汶（S. Stevin，公元1548—1620年）的《数学纪录》二书编译而成[②]。书中主要讲造表法，所用公式为“三要法”和“二简法”，即相当于下面的五个公式：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$（以上“三要法”）



3—4 八线图

① “八线”是与一个角有关的八条线段，叫做“正弦”、“余弦”、“正切”、“余切”、“正割”、“余割”、“正矢”、“余矢”，如图3—4所示。

② 白尚恕：《介绍我国第一部三角学——“大测”》，载《数学通报》，1962年第2期，第48—封底。